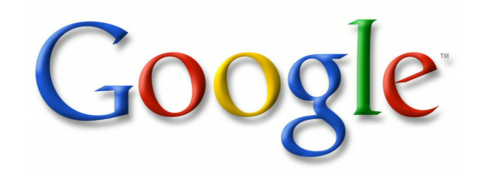


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

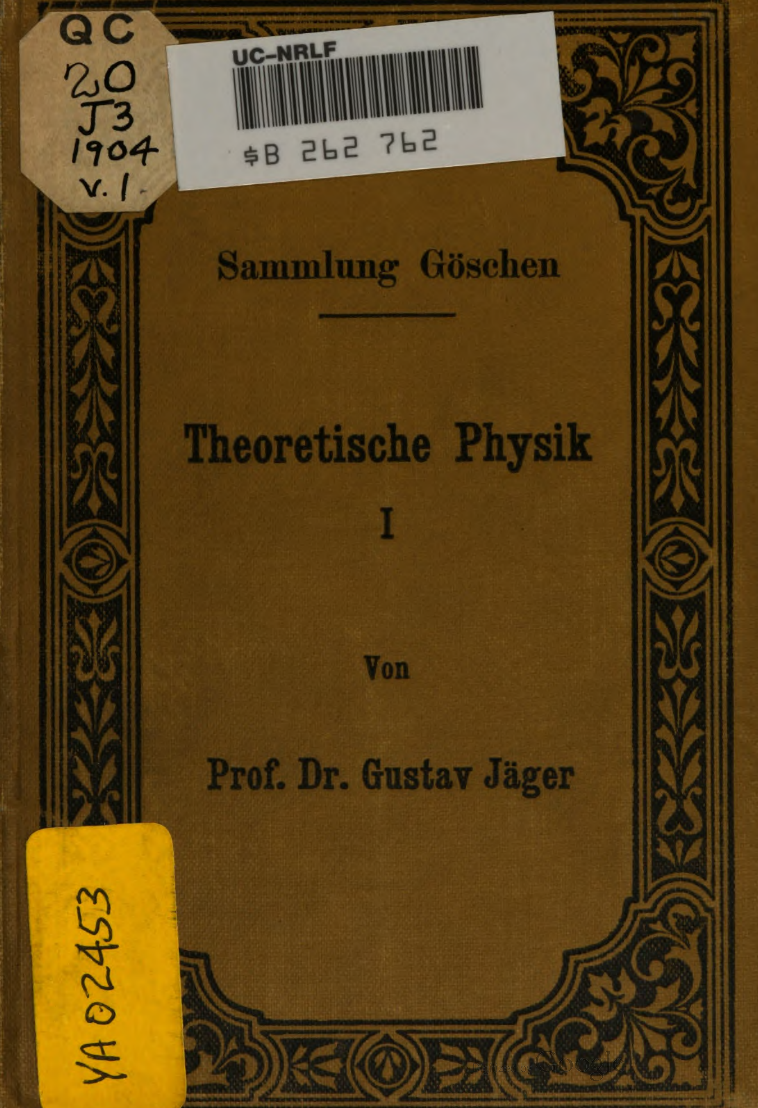
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

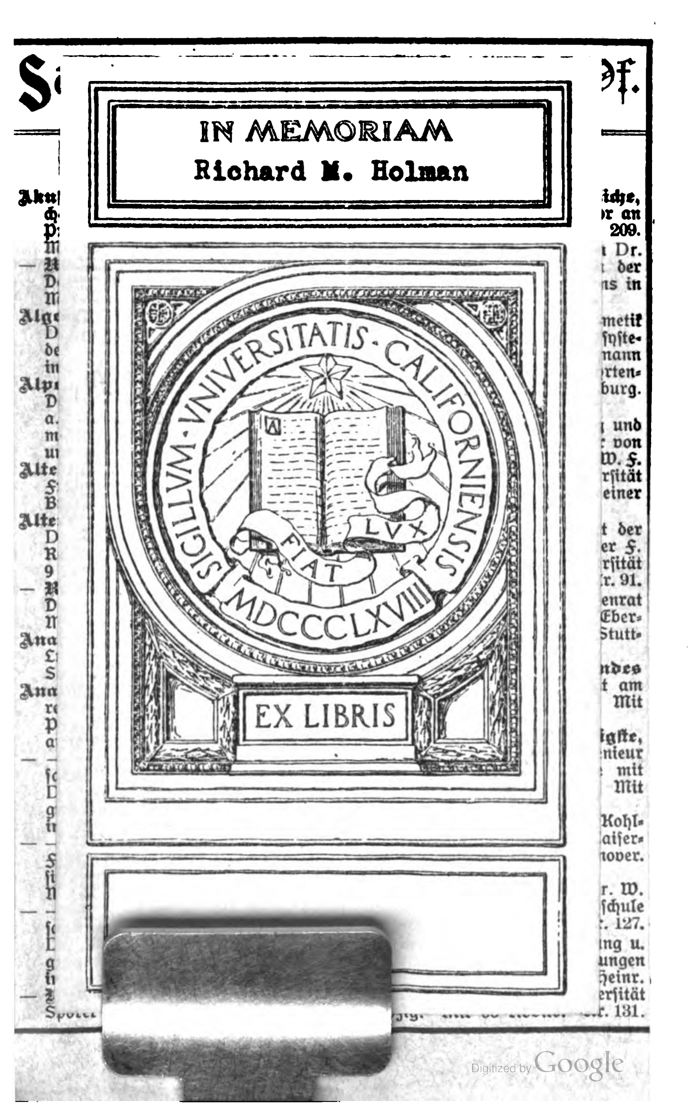
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



QC 20 J3 1904 v.1
UC-NRLF
$B 262 762
YA 02453
Digitized by Google



Digitized by Google

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Biologie der Tiere II: Beziehungen d. Tiere zur organ. Natur v. Dr. Heinr. Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Bleicherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Wilhelm Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Brant. Hans Sachs und Johann Fischart nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgew. u. erläut. von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

Buchführung. Lehrgang der einfachen u. dopp. Buchhaltung von Rob. Stern, Oberlehrer der Öff. Handelslehranst. u. Doz. d. Handelshochschule z. Leipzig. Mit vielen Formularen. Nr. 115.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy in Bonn. Nr. 174.

Burgenkunde, Abriß der, von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbild. Nr. 119.

Chemie, Allgemeine und physikalische, von Dr. Max Rudolphi, Doz. a. d. Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.

— **Anorganische,** von Dr. Jos. Klein in Waldhof. Nr. 37.

— — siehe auch: Metalloide.

— **Organische,** von Dr. Jos. Klein in Waldhof. Nr. 38.

— **der Kohlenstoffverbindungen** von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191. 192.

— — III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— — IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

Chemisch-Technische Analyse von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbild. Nr. 195.

Cid, Der. Geschichte des Don Ruy Diaz, Grafen von Bivar. Von J. G. Herder. Hrsg. und erläutert von Prof. Dr. E. Naumann in Berlin. Nr. 36.

Dampfkessel, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 67 Figuren. Nr. 9.

Dampfmaschine, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch m. Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 48 Figuren. Nr. 8.

Dichtungen a. mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl m. Einltg. u. Wörterb. herausgegeb. v. Dr. Herm. Jantzen in Breslau. Nr. 137.

Dietrichepen. Kudrun u. Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 10.

Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymn. u. a. d. Realanst. in Ulm. Mit 68 Fig. Nr. 87.

— Repetitorium u. Aufgabensammlung z. Differentialrechnung von Dr. Frdr. Junker, Prof. am Realgymnasium und an der Realanstalt in Ulm. Mit 42 Figuren. Nr. 146.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilhelm Ranisch, Gymnasial-Oberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, dipl. Hütteningen. I. Teil: Das Roheisen. Mit 17 Fig. u. 4 Tafeln. Nr. 152.

— II. Teil: Das Schmiedeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Elektrizität. Theoret. Physik III. Teil: Elektrizität u. Magnetismus. Von Dr. Gust. Jäger, Professor a. d. Univers. Wien. Mit 33 Abbildgn. Nr. 78.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor der Elektrotechnik an der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 47 Fig. Nr. 196.

— II: Die Gleichstromtechnik. Mit 74 Figuren. Nr. 197.

— III: Die Wechselstromtechnik. Mit 109 Figuren. Nr. 198.

Digitized by Google

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Erdmagnetismus, Erdstrom, Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitgl. des Kgl. Preuß. Meteorolog. Inst. zu Potsdam. Mit 14 Abbild. und 3 Tafeln. Nr. 175.

Ethik von Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 90.

Färberei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule f. Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Fernsprechwesen, Das, von Dr. Ludwig Rellstab in Berlin. Mit 47 Figuren und 1 Tafel. Nr. 155.

Filzfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Finanzwissenschaft v. Geh. Reg.-Rat Dr. R. van der Borght in Friedenau-Berlin. Nr. 148.

Fischart, Johann. Hans Sachs u. Joh. Fischart nebst e. Anh.: Brant u. Hutten. Ausgewählt u. erläut. von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

Fischerei und Fischzucht v. Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.

Formelsammlung, Mathemat., u. Repetitorium d. Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze d. Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie d. Ebene u. d. Raumes, d. Different.- u. Integralrechn. v. O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymn. in Schw.-Gmünd. Mit 18 Fig. Nr. 51.

— **Physikalische,** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Professor an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.

Fremdwort, Das, im Deutschen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Gardinenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Geodäsie von Dr. C. Reinhertz, Professor an der Technischen Hochschule Hannover. Mit 66 Abbild. Nr. 102.

Geographie, Astronomische, von Dr. Siegm. Günther, Professor a. d. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.

— **Physische,** von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.

— siehe auch: Landeskunde. — Länderkunde.

Geologie v. Professor Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbild. und 4 Tafeln mit über 50 Figuren. Nr. 13.

Geometrie, Analytische, der Ebene v. Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 57 Figuren. Nr. 65.

— **Analytische, des Raumes** von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Mit 28 Abbildungen. Nr. 89.

— **Darstellende,** v. Dr. Rob. Haußner, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. I. Mit 110 Figuren. Nr. 142.

— **Ebene,** von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit 111 zweifarb. Fig. Nr. 41.

— **Projektive,** in synthet. Behandlung von Dr. Karl Doehlemann, Prof. an der Universität München. Mit 85 zum Teil zweifarb. Figuren. Nr. 72.

Digitized by Google

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Geschichte, Bayerische, von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.
— **des Byzantinischen Reiches** von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.
— **Deutsche, im Mittelalter** (bis 1500) von Dr. F. Kurze, Oberl. am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 33.
— **Französische,** von Dr. R. Sternfeld, Prof. a. d. Univers. Berlin. Nr. 85.
— **Griechische,** von Dr. Heinrich Swoboda, Professor an der deutschen Universität Prag. Nr. 49.
— **des alten Morgenlandes** von Dr. Fr. Hommel, Professor an der Universität München. Mit 6 Bildern und 1 Karte. Nr. 43.
— **Österreichische, I:** Von der Urzeit bis 1526 von Hofrat Dr. Franz von Krones, Professor an der Universität Graz. Nr. 104.
— — **II:** Von 1526 bis zur Gegenwart von Hofrat Dr. Franz von Krones, Prof. an der Univ. Graz. Nr. 105.
— **Römische,** neubearb. von Realgymnasialdirektor Dr. Julius Koch. Nr. 19.
— **Russische,** von Dr. Wilhelm Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.
— **Sächsische,** von Prof. Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
— **Schweizerische,** von Dr. K. Dändliker, Professor an der Universität Zürich. Nr. 188.
— **der Malerei** siehe: Malerei.
— **der Mathematik** siehe: Mathematik.
— **der Musik** siehe: Musik.
— **der Pädagogik** siehe: Pädagogik.
— **der deutschen Sprache** siehe: Grammatik, Deutsche.

Gesundheitslehre. Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberrealschuldirektor in Freiburg i. B. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abb. u. 1 Taf. Nr. 18.

Gewerbewesen von Werner Sombart, Professor an d. Universität Breslau. I. II. Nr. 203. 204.

Gletscherkunde von Dr. Fritz Machacek in Wien. Mit 5 Abbild. im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.

Götter- und Heldensage, Griechische und römische, von Dr. Herm. Steuding, Professor am Kgl. Gymnasium in Wurzen. Nr. 27.
— siehe auch: Heldensage. — Mythologie.

Gottfried von Straßburg. Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach u. Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Prof. am Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Grammatik, Deutsche, und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.
— **Griechische, I:** Formenlehre von Dr. Hans Meltzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 117.
— — **II:** Bedeutungslehre und Syntax von Dr. Hans Meltzer, Professor an der Klosterschule zu Maulbronn. Nr. 118.
— **Lateinische.** Grundriß der lateinischen Sprachlehre von Professor Dr. W. Votsch in Magdeburg. Nr. 82.
— **Mittelhochdeutsche.** Der Nibelunge Nôt in Auswahl und mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Professor an der Universität Rostock. Nr. 1.
— **Russische,** von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 66.
— — siehe auch: Russisches Gesprächsbuch. — Lesebuch.

Handelskorrespondenz, Deutsche, von Prof. Th. de Beaux, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 182.

Handelskorrespondenz, Französische, von Professor Th. de Beaux, Oberlehrer a. d. Öffentlichen Handelslehranstalt u. Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig Nr. 183.

— **Italienische**, von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Kgl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Nr. 219.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch von Dr. K. Marold, Professor am Königlichen Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Hauptliteraturen, Die, d. Orients v. Dr. M. Haberlandt, Privatdoz a. d. Universität Wien. I. II. Nr. 162. 163.

Heldensage, Die deutsche, von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 32.

— siehe auch: Götter- und Heldensage. — Mythologie.

Herder, Der Cid. Geschichte des Don Ruy Diaz, Grafen von Bivar. Herausgegeb. u. erläutert von Prof. Dr. Ernst Naumann in Berlin. Nr. 36.

Hutten. Hans Sachs und Johann Fischart nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgewählt u. erläut. von Prof. Dr. Jul. Sahr. Nr. 24.

Industrie, Anorganische Chemische, v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I.: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— — II.: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie u. Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— — III.: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Integralrechnung von Dr. Friedr. Junker, Professor am Realgymn. und an der Realanstalt in Ulm. Mit 89 Figuren. Nr. 88.

— Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung von Dr. Friedrich Junker, Professor am Realgymn. und an der Realanstalt in Ulm. Mit 50 Figuren. Nr. 147.

Kartenkunde, geschichtlich von E. Gelcich, Direktor Nautischen Schule in Lu und F. Sauter, Professor gymnasium in Ulm, neu von Dr. Paul Dinse, der Gesellschaft für Erd Berlin. Mit 70 Abbildunge

Kirchenlied. Martin Luthe Murner, und das Kirche 16. Jahrhunderts. Au und mit Einleitungen merkungen versehen von G. Berlit, Oberlehrer am gymnasium zu Leipzig. Nr

Klimalehre von Professor Köppen, Meteorologe der S Hamburg. Mit 7 Tafeln Figuren. Nr. 114.

Kolonialgeschichte von Dr. Schäfer, Professor der Geschi der Universität Berlin. Nr.

Kompositionslehre. Musi Formenlehre von Stephan I. II. Mit vielen Notenbeil Nr. 149. 150.

Körper, der menschliche, sein und seine Tätigkeiten. E. Rebmann, Oberrealschuldi in Freiburg i. B. Mit Ge heitslehre von Dr. med. H. S Mit 47 Abbildungen und 1 T Nr. 18.

Kristallographie von Dr. W. Bru Professor an der Universität St burg. Mit 190 Abbild. Nr. 21

Kudrun und Dietrichepen. Einleitung und Wörterbuch Dr. O. L. Jiriczek, Professor an Universität Münster. Nr. 10.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, 12. Jahrhundert.

Kultur, Die, der Renaissance. (sittung, Forschung, Dichtung v Dr. Robert F. Arnold, Privatdoz an der Universität Wien. Nr. 1

Kulturgeschichte, Deutsche, v Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Digitized by Google

80 Pf. Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Künste, Die graphischen, von Carl Kampmann, Fachlehrer a. d. k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 3 Beilagen und 40 Abbildungen. Nr. 75.

Kurzschrift. Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einigungs-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken u. einem Anhang von Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses in Oranienstein. Nr. 86.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Prof. a. Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen und Profilen. Nr. 63.

Landeskunde von Baden von Prof. Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Kgl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbild. u. 1 Karte. Nr. 176.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildgn. u. 1 Karte. Nr. 215.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) v. Heinr. Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbild. und 1 Karte. Nr. 202.

— **des Königreichs Württemberg** von Dr. Kurt Hassert, Professor der Geographie an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck, Direktor der Landwirtschaftlichen Winterschule in Preuß.-Holland. Nr. 227.

Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert. Kulturhistorische Erläuterungen zum Nibelungenlied und zur Kudrun. Von Professor Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel und 30 Abbildungen. Nr. 93.

Lessings Emilia Galotti. Mit Einleitung und Anmerkungen von Oberlehrer Dr. Votsch. Nr. 2.

— **Minna v. Barnhelm.** Mit Anm. von Dr. Tomaschek. Nr. 5.

— **Nathan der Weise.** Mit Anmerkungen von den Professoren Denzel und Kraz. Nr. 6.

Licht. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gust. Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

Literatur, Althochdeutsche, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Professor am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Literaturdenkmale des 14. u. 15. Jahrhunderts. Ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen in Breslau. Nr. 181.

Literaturen, Die, des Orients. I. Teil: Die Literaturen Ostasiens und Indiens v. Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 162.

— — II. Teil: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken von Dr. M. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Nr. 163.

Literaturgeschichte, Deutsche, von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

— **Deutsche, der Klassikerzeit** von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. Nr. 161.

— **Deutsche, des 19. Jahrhunderts** von Carl Weitbrecht, Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart. I. II. Nr. 134. 135.

Digitized by Google

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Literaturgeschichte, Englische, von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

— **Griechische,** mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Professor an der Universität Greifswald. Nr. 70.

— **Italienische,** von Dr. Karl Voßler, Professor a. d. Universität Heidelberg. Nr. 125.

— **Portugiesische,** von Dr. Karl v. Reinhardstoettner, Professor an der Kgl. Technischen Hochschule in München. Nr. 213.

— **Römische,** von Dr. Hermann Joachim in Hamburg. Nr. 52.

— **Russische,** von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

— **Spanische,** von Dr. Rudolf Beer in Wien. I. II. Nr. 167. 168.

Logarithmen. Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Professor an der Gelehrtenschule d. Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Logik. Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Luther, Martin, Thom. Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

Magnetismus. Theoretische Physik III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

Malerei, Geschichte der, I. II. III. IV. V. von Dr. Rich. Muther, Professor an der Universität Breslau. Nr. 107—111.

Maschinenelemente, Die. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den prakt. Gebrauch von Fr. Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Fig. Nr. [illegible]

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Nr. 221.

Mathematik, Geschichte der, von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Mechanik. Theoret. Physik I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Univ. Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

Meereskunde, Physische, von Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbild. im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.

Metalle, (Anorganische Chemie 2. Teil) v. Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Königl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Metalloide (Anorganische Chemie, 1. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Meteorologie von Dr. W. Trabert, Dozent a. d. Universität u. Sekretär d. k. k. Zentralanstalt für Meteorologie in Wien. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Professor an der Universität Gießen. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.

Minnesang und Spruchdichtung. Walther v. d. Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang und Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Professor an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Morphologie, Anatomie und Physiologie der Pflanzen. Von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Techn. Hochsch. Karlsruhe. Mit 50 Abbild. Nr. 141.

Sammlung Göschen

Richard M. Holman

Theoretische Physik

I

Mechanik und Akustik

von

Dr. Gustav Jäger
Professor der Physik an der Universität Wien

Mit 19 Figuren

Dritte, verbesserte Auflage

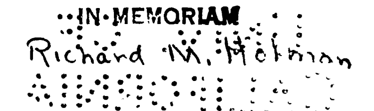
Richard M. Holman
1905.

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1904

Digitized by Google

QC 2
J3
190
v. 1

Alle Rechte, insbesondere das Übersetzungsrecht,
von der Verlagshandlung vorbehalten.



Spamersche Buchdruckerei in Leipzig.

Digitized by Google

QC
125
.J3
1911
v.1

Inhalt.

Seite

Mechanik eines Massenpunkts.

Digitized by Google
921889

Seite

Mechanik starrer Körper.

Mechanik nichtstarrer Punktsysteme.

Digitized by Google

Seite

Hydromechanik.

Akustik.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort.

In dem vorliegenden, drei Bändchen umfassenden kleinen Werk ist der Versuch gemacht, die Grundzüge der theoretischen Physik mit Hilfe der höheren Analysis darzustellen. Es wurde damit der Zweck verfolgt, allen jenen, welche dereinst Gelegenheit hatten, Physik zu hören und in ihrem Beruf anzuwenden, für geringe Kosten ein leicht verständliches Nachschlagebuch der theoretischen Physik zu bieten, wobei in erster Linie an die Bedürfnisse der Techniker in den verschiedensten Berufen gedacht wurde. Ferner wendet sich das Werkchen an alle jene, welche in ihrer rein wissenschaftlichen Tätigkeit der Physik als Nebenwissenschaft nicht entbehren können. Es dürfte daher Physiologen, Chemikern, Geologen, Meteorologen, Geographen usw. willkommen sein. Schließlich soll es den Studierenden der Physik selbst zur Vorbereitung und Erleichterung des Studiums der oft nur schwer verständlichen Vorlesungen dienen. Danach ergab sich als Hauptaufgabe, aus dem großen Gebiet der theoretischen Physik den Stoff gewissenhaft auszuwählen und in einfacher, klarer Weise darzustellen. Auf subtile theoretische Erörterungen, auf lange Deduktionen mit einem verhältnismäßig geringfügigen Endresultat, auf Fragen, welche noch Streitgebiet der Wissen-

Digitized by Google

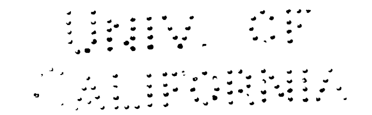
schaft sind, konnten wir uns nicht einlassen. Um so mehr bemühten wir uns, alle jene Begriffe, welche in konkreten Fällen immer wieder auftauchen, so wiederzugeben, daß sich der Studierende deren selbständige Handhabung leicht aneignen kann. Wo es daher möglich war, wurde jeder allgemeine Satz durch seine Anwendung auf häufig aufstoßende Beispiele illustriert.

Freilich wird sich eine gewisse subjektive Färbung nicht haben vermeiden lassen. Als ehemaliger Schüler J. Stefans, eines Meisters leicht faßlicher Darstellung, gab sich der Verfasser möglichst Mühe, dessen Ton zu treffen, was allerdings auf dem zur Verfügung stehenden kargen Raum nur teilweise erreicht werden konnte.

Vorwort zur zweiten und dritten Auflage.

Die kurze Zeit, welche seit dem Erscheinen der ersten Auflage der „Theoretischen Physik" verstrichen ist, ließ es überflüssig erscheinen, für die neuen Auflagen prinzipielle Veränderungen vorzunehmen. Die Andeutungen der meist wohlwollenden Kritik wurden berücksichtigt, wo sie dem Zweck des Werks, das mehr Hilfs- als Lehrbuch sein will, entsprachen.

Digitized by Google



Mechanik eines Massenpunkts.

§ 1. Grundbegriffe — Bewegung — Bahn — Weg.

Mechanik ist die Lehre von den Bewegungserscheinungen, welche sich auf die Begriffe des Raums, der Zeit und der Masse zurückführen lassen.

Ein Punkt bewegt sich, wenn er zu verschiedenen Zeiten gegenüber einem festgelegten Raum verschiedene Lagen einnimmt. Die Verbindungslinie sämtlicher Lagen nennt man die Bahn des Punkts. Nach der Gestalt derselben unterscheiden wir geradlinige und krummlinige Bewegungen. Die Länge der Bahn, welche von dem Punkt in der Zeit t zurückgelegt wird, nennen wir den Weg s.

§ 2. Geschwindigkeit — gleichförmige und ungleichförmige Bewegung.

Weg und Zeit stehen also miteinander in Beziehung, was wir durch die Gleichung

$$s = f(t)$$

darstellen können. f(t) kann nun sehr mannigfaltig sein. Der einfachste Fall ist

$$s = f(t) = v\,t,$$

wobei v eine Konstante ist. Die Bewegung, welche dieser Gleichung entspricht, nennen wir eine gleichförmige, weil in gleichen Zeiten auch immer gleiche Wege zurückgelegt werden. Der Weg v, welcher in der

Digitized by Google

Sekunde beschrieben wird, heißt die Geschwindigkeit des Punkts. Wir messen also die Geschwindigkeit v durch das Verhältnis des Wegs zur zugehörigen Zeit,

$$v = \frac{s}{t}.$$

Da die Geschwindigkeit nur eine Verhältniszahl ist, so ist bei deren Bestimmung die absolute Größe des Wegs bezgl. der Zeit ganz gleichgültig. Unsere Definition der Geschwindigkeit gilt demnach auch für einen unendlich kleinen Weg ds, woraus

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{1}$$

folgt. Auf diese Weise sind wir in der Lage, für einen ganz bestimmten Punkt der Bahn die Geschwindigkeit anzugeben, und erkennen weiter, daß sie sich von Punkt zu Punkt ändern kann; in letzterem Fall haben wir dann eine ungleichförmige Bewegung.

§ 3. Beschleunigung — gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Wir sahen, daß bei der ungleichförmigen Bewegung nicht nur der Weg, sondern auch die Geschwindigkeit eine Funktion der Zeit ist. Wählen wir wiederum die einfachste Funktion, setzen wir also

$$v = b\,t,$$

unter b abermals eine Konstante verstanden, so erhält in jeder Sekunde die Geschwindigkeit den Zuwachs b, welchen wir die Beschleunigung nennen. Für unser gewähltes Beispiel ist die Beschleunigung also eine konstante Größe. Eine derartige Bewegung nennt man deshalb eine gleichförmig beschleunigte.

Digitized by Google

Auch die Beschleunigung

$$b = \frac{v}{t}$$

ist nur eine Verhältniszahl. Wir können deshalb hier ganz dieselbe Überlegung wie bei der Geschwindigkeit machen. Für eine bestimmte Zeit, oder an einem bestimmten Punkt der Bahn ist demnach die Beschleunigung durch den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit gegeben. Wir erhalten so mit Berücksichtigung von (1) die Gleichung

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}, \tag{2}$$

und wir erkennen ohne weiteres, daß auch die Beschleunigung im allgemeinen eine Funktion der Zeit sein wird.

§ 4. Komponenten der Geschwindigkeit und Beschleunigung — resultierende Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Projizieren wir die jeweilige Lage eines sich bewegenden Punkts auf die drei Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, so besitzen die drei Projektionen ebenfalls gewisse Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die Bahnen der Projektionen sind dabei die drei Achsen. Ihre Geschwindigkeiten u, v, w lassen sich genau wie oben entwickeln, ebenso ihre Beschleunigungen f, g, h. Wir erhalten somit

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt};$$

$$f = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad g = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad h = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Digitized by Google

Ist die Bahn des Punkts geradlinig und schließt sie mit den Achsen die Winkel α, β, γ ein, so erkennt man ohne weiteres, daß

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos\alpha ,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos\beta ,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos\gamma$$

ist. Gleicherweise erhält man die Beschleunigung nach den drei Achsen, indem man die wirkliche Beschleunigung mit den Richtungskosinus der Bahn multipliziert.

Man sieht weiter ein, daß ein Punkt, welcher die Geschwindigkeiten u, v, w parallel zu den drei Achsen gleichzeitig besitzen soll, nur eine Geschwindigkeit von ganz bestimmter Größe und Richtung im Raum haben kann. Man nennt diese letztere die resultierende Geschwindigkeit der Komponenten u, v, w. Ganz dasselbe gilt wiederum auch für die Beschleunigung.

§ 5. Parallelogramm der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen.

Was für ein rechtwinkeliges Koordinatensystem gilt, können wir ohne weiteres auf ein schiefwinkeliges übertragen.

Haben wir bloß zwei Geschwindigkeiten, welche gleichzeitig ein Punkt annehmen soll, so erhalten wir die resultierende Geschwindigkeit, wenn wir von dem Punkt aus zwei Gerade ziehen, welche in Richtung und Größe den Geschwindigkeiten entsprechen. Ergänzen wir diesen Winkel zu einem Parallelogramm, so gibt

Digitized by Google

die von dem beweglichen Punkt aus gezogene Diagonale die Größe und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit an.

§ 6. Beharrungsvermögen — Kraft — Massenpunkt — Kräfteparallelogramm.

Bewegt sich ein Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig vorwärts, so sagen wir, er sei frei von allen Kräften, hingegen er sei von Kräften beeinflußt, wenn die geradlinige, gleichförmige Bewegung gestört wird. Während uns die gleichförmige, geradlinige Bewegung zum Begriff des Beharrungsvermögens führt, nennen wir jede Ursache der Änderung einer derartigen Bewegung eine Kraft.

Die Erfahrung lehrt, daß nicht jeder Körper in gleicher Weise von ein und derselben Kraft beeinflußt wird. Während der eine eine große Beschleunigung erfährt, gewinnt der andere nur eine geringe. Wir schreiben diesen Unterschied der Masse der Körper zu. Je größer seine Masse, desto kleiner die Beschleunigung, welche dem Körper eine Kraft zu erteilen vermag. Das Produkt aus der Masse m und der Beschleunigung b kann daher als Maß der Kraft P gelten. Wir erhalten somit die wichtige Gleichung

$$P = m\,b = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Die Masse eines Körpers haben wir als eine von der Lage desselben und der Zeit völlig unabhängige Größe zu denken.

Ist der Körper geometrisch sehr klein, so können wir uns seine ganze Masse in einem Punkt vereinigt denken, den wir dann einen Massenpunkt nenner

Digitized by Google

Nur Massenpunkte wollen wir vorläufig der Betrachtung unterziehen.

Wie von einer Zerlegung und Zusammensetzung der Beschleunigungen, kann man auch von solchen d Kräfte sprechen, was uns unmittelbar auf das Kräft parallelogramm und ähnliches führt. Wir können jede Kraft P in drei aufeinander senkrechte Komponenten X, Y, Z zerlegen, welche parallel den Achsen eines Koordinatensystems wirken. Das Maß der Teilkräfte ist dann gegeben durch

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = X,$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = Y,$$

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} = Z.$$

§ 7. Wurfbewegung — freier Fall.

Wirkt auf einen Massenpunkt eine Kraft von bestimmter Richtung, so kann dessen Bewegung nur in einer Ebene stattfinden, da zur ursprünglichen Bewegungsrichtung nur noch die Richtung der Kraft hinzukommt.

Eine solche Kraft ist die Schwerkraft. Bloß unter dem Einfluß der Schwerkraft muß demnach die Bahn geworfener Körper eine ebene Kurve sein. Wurfrichtung und Richtung der Schwere bestimmen diese Ebene, in welche wir ein rechtwinkeliges ebenes Koordinatensystem so legen wollen, daß die x-Achse horizontal, die y-Achse vertikal ist.

Digitized by Google

Die Schwerkraft Y wirkt parallel zur y-Achse. Parallel zu dieser wird also die Bewegung des Körpers durch die Gleichung

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = Y$$

bestimmt. Parallel zur x-Achse haben wir

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = 0 .$$

Aus der Erfahrung wissen wir, daß die Schwerkraft sich innerhalb eines *beschränkten* Raumes weder mit der Zeit noch mit dem Ort ändert, und daß sie immer *proportional der Masse* m des Körpers ist, auf welchen sie wirkt. Wir können daher

$$Y = - m g$$

setzen, wenn die Konstante g die Beschleunigung der Schwere ist. Y ist negativ, weil die y-Achse nach oben gerichtet ist, während die Schwere entgegengesetzt nach unten wirkt. Unsere Bewegungsgleichungen reduzieren sich daher auf

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = - g .$$

Aus der ersten finden wir

$$\frac{d x}{d t} = a , \quad (3) \qquad x = a t + a' , \quad (4)$$

aus der zweiten

$$\frac{d y}{d t} = - g t + b , \quad (5) \qquad y = - \frac{g t^2}{2} + b t + b' . \quad (6)$$

Die vier Konstanten a, a′, b und b′ ergeben sich aus den *Anfangsbedingungen*, d. h. aus der Lage, Geschwindigkeit und Richtung des Körpers zur Zeit $t = 0$. Es ist demnach a die Geschwindigkeit parallel

Digitized by Google

zur x-Achse, a' die Abszisse, b die Geschwindigkeit parallel zur y-Achse und b' die Ordinate unseres Körpers zu Beginn seiner Bewegung. Wir können durch passende Wahl des Koordinatensystems die Bewegung immer im Ursprung desselben beginnen lassen. Es ist dann $a' = b' = 0$. Es genügen jetzt zur Bestimmung der Lage des Punkts die Gleichungen

$$x = a\,t \quad \text{und} \quad y = b\,t - \frac{g\,t^2}{2}.$$

Eliminieren wir aus diesen beiden Gleichungen die Zeit t, so erhalten wir die Bahngleichung

$$y = \frac{b\,x}{a} - \frac{g\,x^2}{2\,a^2}.$$

Es beschreibt daher ein geworfener Körper, welcher sich bloß unter dem Einfluß der Schwere befindet, eine Parabel.

y wird außer im Anfang noch ein zweites Mal gleich Null, wenn $x = \frac{2\,a\,b}{g}$ wird. Dies ist die Wurfweite. Die Wurfhöhe hat der Körper nach Zurücklegung der halben Wurfweite erreicht, sie ist demnach $y = \frac{b^2}{2\,g}$.

Die Gleichungen für den senkrechten Wurf erhalten wir aus jenen des schiefen, wenn wir einfach $a = 0$ setzen. Für den horizontalen Wurf ist hingegen $b = 0$ anzunehmen. Die Bewegungsgleichung wird dann

$$y = -\frac{g\,x^2}{2\,a^2}.$$

Wählen wir schließlich $a = b = 0$, so ergeben (5) und (6) die Gesetze des freien Falls.

Digitized by Google

Zu gebräuchlichen Formeln gelangen wir auch, wenn wir anstatt der Komponenten a und b die Anfangsgeschwindigkeit c selbst und den Winkel α einführen, welchen die Anfangsrichtung mit der x-Achse, d. i. dem Horizont, bildet. Es ist danach

$$a = c \cos\alpha, \quad b = c \sin\alpha,$$

die Wurfweite

$$x = \frac{2\,c^2}{g} \cos\alpha \sin\alpha,$$

die Wurfhöhe

$$y = \frac{c^2}{2\,g} \sin^2\alpha.$$

Letztere erreicht also ihren größten Wert für $\alpha = 90^0$, d. h. wenn wir bei sonst gleicher Anfangsgeschwindigkeit den Körper senkrecht emporwerfen. Die Wurfweite läßt sich wegen

$$\sin 2\alpha = 2 \cos\alpha \sin\alpha$$

auch

$$x = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha$$

schreiben. Ihr größter Wert wird für $\alpha = \frac{\pi}{4}$, d. i. bei 45^0 Elevation erreicht.

Jede kleinere Wurfweite kann man durch zwei verschiedene α erzielen, da bei $\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$ sich derselbe Wert für $\sin 2\alpha$ ergibt, wie bei $\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$.

§ 8. **Krummlinige Bewegung — Zentripetalbeschleunigung — Fliehkraft.**

Die Beschleunigung, welche ein Massenpunkt in irgend einem Punkt einer krummlinigen Bahn besitzt,

Digitized by Google

können wir in eine Komponente, die mit der Tangente der Kurve zusammenfällt, und in eine Komponente senkrecht darauf, also nach der Richtung der Normalen zerlegen. Wir betrachten einen Massenpunkt, welcher sich von M (Fig. 1) nach M′ bewegt. Seine Geschwindigkeit in M sei v, in M′ v′. Die Komponente der Geschwindigkeit parallel zur Richtung MN ist demnach in M′ $v' \cos\varphi$, senkrecht dazu $v' \sin\varphi$. Auf dem Weg von M nach M′ verstreicht die Zeit τ. Die Beschleunigung in der Richtung der Tangente ist sodann

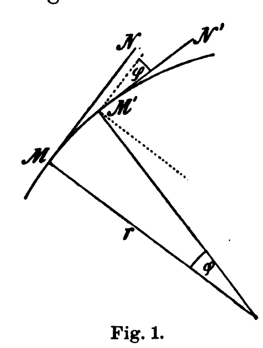


Fig. 1.

$$b_t = \lim \frac{v' \cos\varphi - v}{\tau},$$

in der Richtung der Normalen

$$b_n = \lim \frac{v' \sin\varphi}{\tau},$$

da in M die Geschwindigkeit in der Richtung der Normalen gleich Null ist. Beim Grenzübergang wird

$\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = \varphi = \frac{v\tau}{r}$. Es ist demnach

$$b_t = \frac{dv}{dt}, \quad b_n = \frac{v^2}{r}.$$

Hat der Massenpunkt die Masse m, so können die auf ihn wirkenden Kräfte in eine Tangential- und eine Normalkraft zerlegt werden. Erstere wird gegeben sein durch

Digitized by Google

$$T = m \frac{d^2 s}{d t^2},$$

letztere durch

$$N = \frac{m v^2}{r}.$$

Diese nennt man auch Zentripetalkraft und die dadurch hervorgerufene ebenso große Gegenkraft des beweglichen Massenpunkts dessen Fliehkraft.

§ 9. Das Pendel — schwingende Bewegung.

Eine kleine schwere Kugel von der Masse m sei an einem sehr dünnen festen Faden aufgehängt. Die Masse des Fadens soll gegen jene der Kugel vernachlässigt werden können. Bringen wir die Kugel aus ihrer Ruhelage und geben sie dann frei, so beginnt sie zu schwingen. Wir betrachten bloß die Schwingungen in einer Vertikalebene. Diese sind vorhanden, wenn die Kugel keinen seitlichen Stoß erhält. Auf die Kugel in M (Fig. 2) wirkt die Schwerkraft

$$MN = -mg.$$

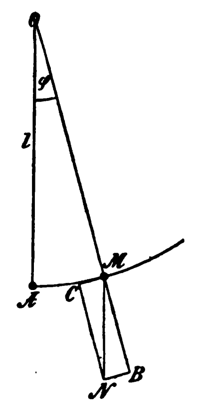


Fig. 2.

Diese zerlegen wir in eine Komponente in der Richtung des gespannten Fadens, welcher durch die Spannung des Fadens das Gleichgewicht gehalten wird, und in eine Komponente senkrecht darauf. Diese ist

$$MC = -mg \sin\varphi,$$

das ist die Kraft, welche die Kugel in die Ruhelage A zurückzutreiben sucht. Die Bewegungsgleichung wird daher sein

Digitized by Google

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = - m g \sin \varphi . \tag{7}$$

Hier ist der Weg $s = l \varphi$, wobei wir l die Pendellänge nennen. Wir wollen ferner nur kleine Schwingungen voraussetzen, so daß $\sin \varphi = \varphi$ angenommen werden kann. Dann wird Gleichung (7)

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - \frac{g}{l} \varphi .$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $\frac{d \varphi}{d t} d t$ und integrieren wir, so folgt

$$\left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 = - \frac{g}{l} \varphi^2 + A .$$

Die Konstante A wird $\frac{g}{l} \varphi_0^2$, wenn wir unter φ_0 jenen Winkel verstehen, bei welchem die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d \varphi}{d t} = 0$ wird. Das heißt: φ_0 ist der größte Ausschlagswinkel des Pendels oder, wie man auch sagt, die Amplitude der Schwingung. Dieser Wert ergibt nach Trennung der Variablen

$$\frac{d \varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} d t .$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$\arcsin \frac{\varphi}{\varphi_0} = t \sqrt{\frac{g}{l}} + B ,$$

oder

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(t \sqrt{\frac{g}{l}} + B\right) .$$

Digitized by Google

Die Konstante B ergibt sich aus den Anfangsbedingungen. Ist für $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, so muß $\sin B = 1$, d. h. $B = \frac{\pi}{2}$ sein. Mithin ist

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right).$$

Diese Gleichung bestimmt die Bewegung des Pendels.

Wollen wir die Winkelgeschwindigkeit für eine beliebige Zeit t kennen lernen, so brauchen wir bloß den Winkel nach der Zeit zu differenzieren, also

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{l}}\, \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$$

zu bilden.

Für $\sqrt{\frac{g}{l}}\, t = \pi$ ist $\varphi = -\varphi_0$, d. h. das Pendel hat eine Schwingung von einer Seite zur andern gemacht. Die dazu benötigte Zeit, die Schwingungsdauer, ist also

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 10. Pendel im widerstehenden Mittel — gedämpfte Schwingung — logarithmisches Dekrement.

Wir machen jetzt die Voraussetzung, daß das Pendel in einem widerstehenden Mittel schwingt, und zwar soll der Widerstand w proportional der Geschwindigkeit der Pendelkugel sein. Wir können ihn also als eine negative Kraft von der Form

$$w = -\alpha \frac{ds}{dt}$$

Digitized by Google

darstellen. Die Pendelgleichung wird somit

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = - m g \sin \varphi - \alpha \frac{d s}{d t}.$$

Wir setzen wiederum nur kleine Schwingungen voraus, können also die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - \frac{g}{l} \varphi - \frac{\alpha}{m} \frac{d \varphi}{d t}$$

schreiben. Wir wollen $\frac{g}{l} = a^2$, $\frac{\alpha}{m} = 2 b$ einführen. Es ergibt sich dann

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + 2 b \frac{d \varphi}{d t} + a^2 \varphi = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist

$$\varphi = e^{\lambda t},$$

indem $\frac{d \varphi}{d t} = \lambda e^{\lambda t}$ und $\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ ist, so daß sich die Gleichung auf

$$\lambda^2 + 2 b \lambda + a^2 = 0$$

reduziert, woraus

$$\lambda = - b \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

folgt. Diese Größe ist nur reell, wenn $b > a$ ist, d. h. wenn der Widerstand, den die schwingende Kugel erfährt, ein sehr großer ist. Dann kommt aber überhaupt keine Schwingung zustande, sondern die Kugel nähert sich einfach allmählich der Ruhelage.

Ist hingegen $a > b$, dann ist λ komplex, indem

$$\lambda = - b \pm i \sqrt{a^2 - b^2}$$

wird. Die Bewegung des Pendels ist in diesem Fall nach bekannten Regeln gegeben durch

Digitized by Google

$$\varphi = A_1 e^{-bt + it\sqrt{a^2 - b^2}} + A_2 e^{-bt - it\sqrt{a^2 - b^2}}$$
$$= e^{-bt}\left(C \cos\sqrt{a^2 - b^2}\,t + D \sin\sqrt{a^2 - b^2}\,t\right).$$

Wir haben demnach eine schwingende Bewegung von immer kleiner werdender Amplitude, eine sogenannte gedämpfte Bewegung.

Die Schwingungsdauer ist jetzt

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{\alpha^2}{4 m^2}}}.$$

Sie ist also größer als beim widerstandsfreien Pendel.

Beginnt das Pendel mit einer Amplitude φ_0 zu schwingen, so ist nach n Schwingungen die Amplitude

$$\varphi_n = \varphi_0 e^{-nb\tau}.$$

Daraus folgt

$$b = \frac{l\varphi_0 - l\varphi_n}{n\tau}.$$

Diese Größe nennt man das logarithmische Dekrement, doch wird auch das Produkt $b\tau$ häufig so genannt.

§ 11. Bewegungsgröße — Zeitintegral der Kraft.

Lassen wir eine Kraft K während einer kleinen Zeit dt auf eine Masse m wirken, so wird sich deren Geschwindigkeit ändern, und zwar wird die Änderung um so beträchtlicher ausfallen, je größer die Kraft und je größer dt ist. Die Gesamtänderung wird demnach dem Produkt K dt proportional gesetzt werden können. Für eine endliche Zeit erhalten wir dann den Gesamteinfluß der Kraft auf die bewegliche Masse m, wenn wir $\int_0^t K\,dt$ bilden. Da nun

Digitized by Google

$$K = m \frac{d^2 s}{d t^2} = m \frac{d v}{d t},$$

so

$$\int_0^t K\, dt = m \int_0^t \frac{d v}{d t}\, d t = m v - m v_0,$$

wenn die Geschwindigkeit zu Beginn v_0 und zu Ende der Zeit t v war.

Die Größe $m v$ nennt man die Bewegungsgröße der Masse m. Die Einwirkung der Kraft durch eine gegebene Zeit auf eine bewegliche Masse m kann demnach durch die Differenz der Bewegungsgrößen zu Beginn und zu Ende dieser Zeit gemessen werden. Die Kraft ist also unmittelbar durch den Zuwachs der Bewegungsgröße bestimmt, welchen das Bewegliche in der Sekunde erfährt.

Man nennt den Ausdruck $\int_0^t K\, dt$ auch das Zeitintegral der Kraft.

§ 12. Stoß unelastischer und elastischer Kugeln.

Vom Zeitintegral der Kraft können wir eine Anwendung beim Zusammenstoß zweier Kugeln machen. Wir setzen voraus, daß die Bewegung der Kugeln in der Verbindungsgeraden ihrer Mittelpunkte erfolgt. Ihre Bewegungsgrößen seien vor dem Zusammenstoß $m c$ bezüglich $m' c'$. Sind die Kugeln vollkommen unelastisch, so wirken sie beim Zusammenstoß so lange aufeinander, bis sie dieselbe Geschwindigkeit u angenommen haben. Die neuen Bewegungsgrößen sind also $m u$ und $m' u$. Mithin hat die erste Kugel $m(c - u)$ an Bewegungsgröße verloren, während die zweite $m'(u - c')$ gewonnen hat. Beide

Digitized by Google

Größen müssen einander gleich sein, da auf beide Kugeln ja dieselbe Kraft während derselben Zeit wirkt. Es ist also

$$m(c-u)=m'(u-c'),$$

oder die Geschwindigkeit nach dem Stoß

$$u=\frac{mc+m'c'}{m+m'}.$$

Sind die Kugeln vollkommen elastisch, so hört die Einwirkung derselben aufeinander bei gleichwerdender Geschwindigkeit noch nicht auf, da die elastischen Kräfte die Kugeln wieder auseinandertreiben. Und zwar ist das Zeitintegral vor und nach dem Gleichwerden der Geschwindigkeiten gleich groß. Sind die Endgeschwindigkeiten v und v', so werden wir haben

$$m(c-u)=m'(u-c')=m(u-v)=m'(v'-u),$$

woraus dann folgt

$$v=2\frac{mc+m'c'}{m+m'}-c$$

und

$$v'=2\frac{mc+m'c'}{m+m'}-c'.$$

Bei gleichen Massen wird

$$v=c',\quad v'=c,$$

d. h. die Kugeln vertauschen nach dem Stoß ihre Geschwindigkeiten. Ist $m'=\infty$, $c'=0$, was wir beim Stoß gegen eine feste Wand annehmen können, so wird

$$v=-c,$$

d. h. die Kugel wird mit unveränderter Geschwindigkeit zurückgeworfen.

Digitized by Google

§ 13. Arbeit — Wegintegral der Kraft — kinetische Energie.

Wirkt eine Kraft K auf ein Bewegliches, welches in der Richtung der Kraft den Weg ds zurücklegt, so nennt man Kds die Arbeit der Kraft K auf dem Weg ds. Das ist z. B. der Fall, wenn wir ein Gewicht von der Größe K um die Höhe ds heben. $\int_{s_0}^{s_1} K\,ds$ ist demnach die Arbeit, welche die Kraft K von s_0 bis s_1 leistet. Es ist aber

$$\int_{s_0}^{s_1} K\,ds = \int_{s_0}^{s_1} m\frac{d^2 s}{dt^2}\,ds = m\int_{s_0}^{s_1}\frac{dv}{dt}\,ds = m\int_{s_0}^{s_1}\frac{ds}{dt}\,dv$$

$$= m\int_{s_0}^{s_1} v\,dv = \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}.$$

Die Größe $\frac{m v^2}{2}$ nennen wir die lebendige Kraft oder die kinetische Energie der Masse m. Es ist demnach die Änderung der lebendigen Kraft des Beweglichen gleich der Arbeit, welche die Kraft auf dem Weg $s_1 - s_0$ geleistet hat.

Den Ausdruck $\int_{s_0}^{s_1} K\,ds$ nennt man das Wegintegral der Kraft.

Eine jede Kraft K können wir bekanntlich in drei senkrecht aufeinanderstehende Komponenten X, Y, Z zerlegen. Die Projektionen des Weges ds auf die Koordinatenachsen sind entsprechend dx, dy, dz. Lassen wir nun die Kraft K auf dem Wege ds wirken, so leisten die drei Kraftkomponenten die Arbeiten Xdx,

Digitized by Google

$Y\,dy$, $Z\,dz$. Wir können diese drei Größen addieren und zwischen den Grenzen s_0 und s_1 integrieren. Wie leicht ersichtlich, ergibt dies

$$\int_{s_0}^{s_1}\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$

$$=\int_{s_0}^{s_1} m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right)dt$$

$$=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]_{s_0}^{s_1}=\frac{m\,v_1^2}{2}-\frac{m\,v_0^2}{2}.$$

Auch so können wir die Beziehung zwischen Arbeit und lebendiger Kraft darstellen, was besonders dann am Platz ist, wenn gleichzeitig mehrere Kräfte auf einen Massenpunkt m einwirken und die verschiedenen Richtungen der Kräfte mit dem Weg des Beweglichen nicht zusammenfallen.

Haben die Kräfte die Resultierende K, welche mit den Achsen des Koordinatensystems die Winkel λ, μ, ν einschließt, während der Weg die Richtungswinkel α, β, γ hat, so ist

$$X=K\cos\lambda,\quad Y=K\cos\mu,\quad Z=K\cos\nu,$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\alpha=v\cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\beta=v\cos\beta,$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{ds}{dt}\cos\gamma=v\cos\gamma$$

und wir erhalten

Digitized by Google

$$\int_{s_0}^{s_1}\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$

$$=\int_{s_0}^{s_1} K\,v\,(\cos\lambda\cos\alpha+\cos\mu\cos\beta+\cos\nu\cos\gamma)\,dt$$

$$=\int_{s_0}^{s_1} K\cos\vartheta\,v\,dt=\int_{s_0}^{s_1} K\cos\vartheta\,ds\,,$$

wenn der Winkel zwischen der Richtung der resultierenden Kraft und dem Weg ϑ ist.

Sind also Kraft und Weg nicht gleich gerichtet, so ist die geleistete Arbeit gleich dem Produkt aus Kraft und Weg multipliziert mit dem Kosinus des von den Richtungen beider eingeschlossenen Winkels.

§ 14. Kraftfunktion — Potential — Gesetz der Erhaltung der Energie.

Es kommt in der Natur der Fall häufig vor, daß die drei Kraftkomponenten, welche auf einen Massenpunkt wirken, sich darstellen lassen durch

$$X=\frac{\partial F}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial F}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Wir nennen dann die Funktion F die Kraftfunktion. Der negative Wert davon

$$H=-F$$

ist das Potential der Kräfte.

Durch Einführung dieser Begriffe können wir unsere Arbeitsgleichung folgendermaßen umgestalten. Es ist

Digitized by Google

$$\int_{s_0}^{s_1}\left(X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}\right)dt$$
$$=\int_{s_0}^{s_1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt$$
$$=\int_{s_0}^{s_1}\frac{dF}{dt}dt=F_1-F_0=\frac{m v_1^2}{2}-\frac{m v_0^2}{2}.$$

Die geleistete Arbeit ist also nicht nur der Änderung der lebendigen Kraft, sondern auch der Änderung der Kraftfunktion gleich.

Führen wir das Potential ein, so ergibt sich

$$\frac{m v_1^2}{2}+H_1=\frac{m v_0^2}{2}+H_0.$$

Die Summe zwischen kinetischer und potentieller Energie ist eine konstante Größe. Man muß nämlich das Potential einer Energie gleichwertig erachten, weshalb man es auch potentielle Energie nennt. Der von uns zuletzt gewonnene Satz wird das Prinzip von der Erhaltung der Energie genannt.

§ 15. Fallbewegung auf willkürlicher Bahn.

Als Beispiel eines Potentials können wir die Funktion

$$H=mgz$$

ansehen, wenn wir unter g die Beschleunigung der Schwere auf die Masse m und unter z die Höhe verstehen, in welcher sich die Masse befindet. In der Tat ist dann

$$X=-\frac{\partial H}{\partial x}=0,\quad Y=-\frac{\partial H}{\partial y}=0,\quad Z=-\frac{\partial H}{\partial z}=-mg.$$

Digitized by Google

Ein Körper, welcher lediglich der Schwerkraft unterworfen ist, wird demnach der Gleichung gehorchen

$$\frac{m v^2}{2} + m g z = \frac{m v_0^2}{2} + m g z_0 = \text{Const.}$$

Das heißt: in jeder bestimmten Höhe z hat der Körper auch immer eine ganz bestimmte Geschwindigkeit v. Wie beschaffen dabei die Form der Bahn ist, auf der der Körper fällt oder steigt, ist ganz gleichgültig.

Schreiben wir die Gleichung

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = m g (z_0 - z),$$

so sehen wir ohne weiteres, daß die zum Heben des Gewichts $m g$ um die Höhe $z_0 - z$ nötige Arbeit unmittelbar durch die Änderung der lebendigen Kraft bestimmt ist.

§ 16. Keplers Gesetze — Gravitationsgesetz.

Aus den Gesetzen, welche Kepler für die Planetenbewegung fand, schloß Newton, daß sich zwei Punkte von den Massen M und m und der Entfernung r mit einer Kraft anziehen, welche gleich ist

$$K = -\frac{h M m}{r^2}.$$

Es ist dies das berühmte Gravitationsgesetz. Wir wählen das negative Vorzeichen, weil die Kraft den Abstand r zu verkleinern sucht; h nennt man die Gravitationskonstante.

Wir denken uns M fest und m vollkommen frei beweglich. Da für die Lage der Bahn nur die Anfangsrichtung der Bewegung von m und die Richtung der Kraft, welche in der Verbindungsgeraden beider Massen

Digitized by Google

liegt, maßgebend ist, so findet die Bewegung in einer Ebene statt. Es genügt daher zur Bahnbestimmung ein ebenes Koordinatensystem, in dessen Ursprung die Masse M liegen soll. m habe die Koordinaten x, y, der Radiusvektor r schließe mit der y-Achse den Winkel φ ein; dann ist

$$x = r \sin\varphi, \quad y = r \cos\varphi.$$

Die Komponenten der Kraft parallel zur x- und y-Achse sind

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{h M m}{r^2} \sin\varphi = -\frac{h M m}{r^2} \frac{x}{r},$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{h M m}{r^2} \cos\varphi = -\frac{h M m}{r^2} \frac{y}{r}. \qquad (8)$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen mit y, die zweite mit x und subtrahieren sie voneinander, so erhalten wir

$$y \frac{d^2 x}{d t^2} - x \frac{d^2 y}{d t^2} = 0$$

oder

$$\frac{d}{d t}\left(y \frac{d x}{d t} - x \frac{d y}{d t}\right) = 0,$$

daher

$$y \frac{d x}{d t} - x \frac{d y}{d t} = 2 c,$$

wobei c konstant ist.

Schreitet unsere Masse m in der Zeit d t um das Wegstück d s mit den Komponenten d x und d y vorwärts, so beschreibt dabei der Radiusvektor r die Fläche

$$\frac{y\, d x - x\, d y}{2} = \frac{r^2\, d\varphi}{2}.$$

In der Zeiteinheit wird er demnach die Fläche

$$\frac{1}{2}\left(y \frac{d x}{d t} - x \frac{d y}{d t}\right) = \frac{r^2}{2} \frac{d\varphi}{d t} = c \qquad (9)$$

Digitized by Google

bestreichen. Man nennt deshalb die Größe c auch die Flächengeschwindigkeit der Masse m, die für unsern Fall eine konstante Größe ist.

Multiplizieren wir die Gleichungen (8) mit $\frac{dx}{dt}$ bezüglich $\frac{dy}{dt}$ und addieren sie, so ergibt sich

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]=-\frac{hMm}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=-\frac{hMm}{r^2}\frac{dr}{dt}=hMm\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right),$$

da ja $x^2+y^2=r^2$, mithin

$$x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=r\frac{dr}{dt}$$

ist.

Ferner ist

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=v^2,$$

wobei also v die Geschwindigkeit der Masse m bedeutet. Sonach wird durch Integration

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{hMm}{r}+A.$$

Die Konstante A finden wir leicht aus den Anfangsbedingungen, für welche die Geschwindigkeit v_0 und der Radiusvektor r_0 vorhanden sein soll. Somit ist

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{hMm}{r_0}+A,$$

woraus folgt

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\frac{hMm}{r}-\frac{hMm}{r_0}. \tag{10}$$

Digitized by Google

So gestaltet sich der Satz von der Erhaltung der Energie für unsern speziellen Fall. $-\frac{h M m}{r}$ ist demnach das Potential der Kraft $-\frac{h M m}{r^2}$.

Den unendlich kleinen Weg $d s$ können wir nun in zwei Komponenten in der Richtung des Radiusvektor und senkrecht darauf zerlegen. Diese sind $d r$ und $r d \varphi$, und es besteht die Beziehung

$$(d s)^2 = (d r)^2 + (r d \varphi)^2 ,$$

mithin auch

$$v^2 = \left(\frac{d s}{d t}\right)^2 = \left(\frac{d r}{d t}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)^2 .$$

Aus Gleichung (9) und (10) folgt nun leicht

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{2c}{r^2} = \pm \sqrt{v_0^2 - \frac{2hM}{r_0} + \frac{2hM}{r} - \frac{4c^2}{r^2}} .$$

Diese Gleichung können wir noch verwandeln in

$$\pm \frac{\frac{2 c d r}{r^2}}{\sqrt{v_0^2 - \frac{2 h M}{r_0} + \frac{h^2 M^2}{4 c^2} - \left(\frac{h M}{2 c} - \frac{2 c}{r}\right)^2}} = d \varphi .$$

Wählen wir

$$v_0^2 - \frac{2 h M}{r_0} + \frac{h^2 M^2}{4 c^2} = \alpha^2 ,$$

$$\frac{h M}{2 c} - \frac{2 c}{r} = z ,$$

so gewinnen wir die einfache Form

$$\pm \frac{d z}{\sqrt{\alpha^2 - z^2}} = d \varphi .$$

Digitized by Google

Das gibt integriert

$$\arccos\frac{z}{\alpha} = \varphi + C,$$

$$z = \alpha\cos(\varphi + C).$$

Setzen wir nun für z wieder seinen Wert ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$r = \frac{\frac{4c^2}{hM}}{1 - \frac{2c\alpha}{hM}\cos(\varphi + C)}.$$

Wir wollen den Winkel φ so wählen, daß für $\varphi = 0$ r ein Minimum wird. Dies ist der Fall, wenn wir die Konstante $C = \pi$ setzen. Unsere Gleichung wird nu

$$r = \frac{\frac{4c^2}{hM}}{1 + \frac{2c\alpha}{hM}\cos\varphi}. \qquad (11)$$

Je nachdem

$$\frac{2c\alpha}{hM} \lesseqgtr 1$$

ist, haben wir in (11) die Gleichung einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel vor uns. Diese drei Kurven sind also an die Bedingung

$$v_0^2 - \frac{2hM}{r_0} \lesseqgtr 0$$

geknüpft, was man leicht erhält, wenn man den Wert für α wieder einführt.

Sind für eine Ellipse die beiden Halbachsen a und b, setzen wir $a^2 - b^2 = e^2$ und $\frac{e}{a} = \varepsilon$, so gilt die Gleichung

Digitized by Google

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Die Fläche der Ellipse ist $f = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$. In unserem Fall ist die Fläche aber auch gleich $c\,T$, wenn T die Umlaufszeit des Massenpunkts m um M ist. Es ist demnach

$$c\,T = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$$

oder

$$c^2 T^2 = \pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2).$$

Gleichung (11) ergibt aber

$$\frac{4\,c^2}{h\,M} = a(1-\varepsilon^2),$$

mithin

$$c^2 T^2 = \pi^2 a^3 \frac{4\,c^2}{h\,M}$$

oder

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{h\,M}{4\,\pi^2}. \tag{12}$$

Den von uns gerechneten Fall können wir auf die Planetenbewegung anwenden, wenn wir M als die Sonne, m als einen Planeten ansehen. Kepler fand dafür folgende Gesetze:

„1. Der Radiusvektor von der Sonne nach dem Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

2. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Würfel der halben großen Achsen ihrer Bahnen."

Wir finden diese drei Gesetze in den Gleichungen (9), (11) und (12).

Digitized by Google

§ 17. Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Wirken auf einen Punkt verschiedene Kräfte nach verschiedenen Richtungen und geben wir ihm eine sehr kleine Verschiebung δs, so wird jede Kraft P dabei eine Arbeit δA leisten, welche nach § 13 gegeben ist durch

$$\delta A = \Sigma P \delta s \cos \vartheta,$$

wenn ϑ der Winkel ist, welchen Kraft und Verschiebungsrichtung einschließen. Es ist also

$$\delta s \cos \vartheta = \delta p$$

die Projektion der Verschiebung auf die Richtung der Kraft. Ist nun

$$\Sigma P \delta p = 0,$$

so wird bei der Verschiebung keine Arbeit geleistet, d. h. die Kräfte müssen in der Verschiebungsrichtung eine Resultierende gleich Null haben, sie müssen im Gleichgewicht sein.

Zerlegen wir die Kräfte nach den drei Achsen eines Koordinatensystems, so wird unser Gleichgewichtssatz

$$\Sigma P \delta p = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0. \quad (13)$$

Sollen die Kräfte nach allen Richtungen des Raums im Gleichgewicht sein, so muß

$$X \delta x = Y \delta y = Z \delta z = 0,$$

mithin auch

$$X = Y = Z = 0 \quad (14)$$

sein, da wir ja die Verschiebung auch in einer der Koordinatenachsen vornehmen können, und dann die Projektionen auf die beiden anderen von selbst gleich Null werden. Die Kräfte heben sich also wirklich gegenseitig auf.

Dieses Prinzip für das Gleichgewicht eines Systems von Kräften nennt man das Prinzip der virtuellen

Digitized by Google

Verschiebungen. Es rührt von Lagrange her und kann etwa folgendermaßen formuliert werden: Ein System von Kräften befindet sich im Gleichgewicht, wenn bei einer unendlich kleinen Verschiebung des Angriffspunkts keine Arbeit geleistet wird.

Ist der Punkt nicht nach allen Richtungen frei beweglich, sondern ist er genötigt, auf einer bestimmten Fläche oder Linie zu bleiben, so kann dies folgendermaßen in Rechnung gezogen werden. Die Gleichung der Fläche, welche der Punkt nicht verlassen kann, sei

$$F(x, y, z) = 0 .$$

Geben wir daher dem Punkt eine Verschiebung δs, deren Komponenten δx, δy, δz sind, so muß auch die Gleichung

$$F(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$$
$$= F(x, y, z) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0$$

erfüllt sein und damit auch

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0 .$$

Diese Gleichung läßt sich mit (13) zu folgender vereinigen:

$$\left(X + \lambda\frac{\partial F}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z + \lambda\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta z = 0 ,$$

wobei λ ein willkürlicher Faktor ist.

Diese Gleichung kann wegen der Willkür des Koordinatensystems nur bestehen, wenn

$$X + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 0 ,$$

Digitized by Google

$$Y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \tag{15}$$

$$Z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Hätten wir die Bedingung gestellt, der Punkt müsse auf einer Linie bleiben, so wären zwei Bedingungsgleichungen, etwa $f(x, y, z) = 0$ und $f_1(x, y, z) = 0$ zu (13) hinzugekommen. Das Resultat wäre dann

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

$$Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0,$$

$$Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial f_1}{\partial z} = 0.$$

λ und μ sind ganz willkürliche Faktoren, deren Wert sich aus den vorhandenen Kräften ermitteln läßt.

Nehmen wir an, ein Massenpunkt m, auf den nur die Schwerkraft wirkt, soll auf einer Kugelfläche bleiben, deren Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$

Es ist also

$$X = Y = 0, \; Z = -mg, \; \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \; \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \; \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

Nach den Gleichungen (15) ist daher

$$2\lambda x = 2\lambda y = 0,$$

das heißt

$$x = y = 0.$$

Für z folgt jetzt aus der Kugelgleichung

$$z = \pm a.$$

Digitized by Google

Der Massenpunkt ist also bloß an zwei Punkten, nämlich am obersten und untersten der Kugel im Gleichgewicht. Danach ergibt sich auch der Wert von λ aus der Gleichung

$$-mg \pm 2\lambda a = 0.$$

§ 18. Prinzip von d'Alembert.

Dieses lautet: Sind die Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, nicht im Gleichgewicht, so können wir immer eine Kraft hinzufügen, welche ihnen das Gleichgewicht hält, und sodann das Prinzip der virtuellen Verschiebungen anwenden. Die Komponenten der zugefügten Kraft müssen natürlich der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt den Komponenten der übrigen Kräfte sein. Sind letztere

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

so muß die hinzugefügte Kraft, welche das Gleichgewicht herstellen soll, die Komponenten $-X$, $-Y$, $-Z$ haben. Dann läßt sich nach Gleichung (13) das Prinzip in die Form kleiden

$$\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = 0,$$

woraus wiederum leicht die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad (16)$$

folgen, was die Richtigkeit des Prinzips beweist.

Digitized by Google

§ 19. Lagranges Folgerungen.

Stellen wir die Bedingung, daß der bewegliche Massenpunkt m auf einer Fläche

$$F(x, y, z) = 0$$

bleiben soll, so verwandeln sich mit Berücksichtigung von (16) die Gleichungen (15) nach Lagrange in

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = X + \lambda \frac{\partial F}{\partial x},$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = Y + \lambda \frac{\partial F}{\partial y},$$

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} = Z + \lambda \frac{\partial F}{\partial z},$$

was auf mehr Bedingungsgleichungen erweitert werden kann.

Das Beispiel des § 17 liefert uns also folgende Bewegungsgleichungen:

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = 2 \lambda x,$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = 2 \lambda y,$$

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} = - m g + 2 \lambda z.$$

Nach diesen Gleichungen muß sich demnach ein Massenpunkt auf einer Kugelfläche bewegen, wenn er bloß der Schwerkraft unterworfen ist.

Nehmen wir an, die Bewegung finde bloß in der (x, z)-Ebene statt, und setzen wir jetzt

$$x = a \sin \varphi, \quad z = - a \cos \varphi,$$

d. h. zählen wir den Winkel φ von der negativen

Digitized by Google

z-Achse aus, es sei ferner x gegen z immer sehr klein, was nur möglich ist, wenn $\sin\varphi$ sehr klein ist, so kann

$$\sin\varphi = \varphi, \quad \cos\varphi = 1,$$

also

$$x = a\varphi, \quad z = -a$$

gesetzt werden, und wir erhalten die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{2\lambda}{m}\varphi$$

und

$$0 = -mg - 2\lambda a.$$

Demnach ist $\lambda = -\frac{mg}{2a}$ und

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{a}\varphi.$$

Das ist aber die aus § 9 bekannte Pendelgleichung, wobei wir unter a die Pendellänge zu verstehen haben. Tatsächlich ist ja auch die dort behandelte Pendelbewegung nichts anderes als ein spezieller Fall der Bewegung eines Punkts, welcher auf einer Kugelfläche zu bleiben gezwungen ist.

Aber auch unser allgemeiner Fall setzt sich, wie uns die drei Gleichungen lehren, aus drei schwingenden Bewegungen, parallel den Koordinatenachsen, zusammen, welche den Pendelgesetzen folgen.

Mechanik starrer Körper.

§ 20. Punktsystem.

Alle Lehrsätze, welche wir in den vorhergehenden Paragraphen für die Bewegung eines Massenpunkts kennen gelernt haben, gelten auch für ein

Digitized by Google

Punktsystem. Unter einem solchen versteht man einen Komplex von Massenpunkten, welche sich durch Kräfte gegenseitig beeinflussen. Wir brauchen zur Lösung eines speziellen Falls nur die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung aller vorkommenden Kräfte für einen jeden Punkt aufzustellen.

Erst an einem System materieller Punkte können wir so recht den Nutzen der verschiedenen Prinzipien erkennen. So genügt z. B. zur Gleichgewichtsbestimmung der einfachen Maschinen vollkommen das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

§ 21. Schwerpunkt — Massenmittelpunkt.

Ist die gegenseitige Lage der materiellen Punkte unveränderlich, so haben wir einen starren Körper vor uns. Auf diesen wirke nur die Schwerkraft, und wir stellen uns die Frage, ob es einen Punkt gibt, welcher unterstützt den Körper in jeder beliebigen Lage im Gleichgewicht hält.

Wir benutzen zur Beantwortung dieser Frage das Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Nach § 17 muß für ein Punktsystem die Gleichung

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = 0$$

gelten. Für die Schwerkraft reduziert sich diese Gleichung auf

$$\Sigma Z\,\delta z = 0\,,$$

da diese ja nur parallel zur z-Achse wirkt, weshalb von vornherein

$$X = Y = 0$$

zu setzen ist.

Wir verlegen den Unterstützungspunkt in den Ursprung des Koordinatensystems und geben dem Körper nur eine kleine Drehung $\delta\varphi$ um die y-Achse. Ein Punkt

Digitized by Google

in der Entfernung r von der y-Achse von der Masse m und der Abszisse x erhält die Verschiebung

$$\delta s = r \, \delta \varphi ,$$

deren Komponente

$$\delta z = \delta s \frac{x}{r} = x \, \delta \varphi$$

ist. Die Schwerkraft leistet dabei die Arbeit $-mgx\delta\varphi$, welche für sämtliche vorhandene Massenpunkte zusammengenommen gleich Null sein muß. Daraus folgt

$$\Sigma - m g x \, \delta \varphi = - g \, \delta \varphi \, \Sigma m x = 0 ,$$

also auch

$$\Sigma m x = 0 .$$

Vollführen wir die Drehung um die x-Achse, so erhalten wir als Gleichgewichtsbedingung

$$\Sigma m y = 0 .$$

Da es nun für den Unterstützungspunkt gleichgültig sein soll, welche Lage immer der Körper einnimmt, so folgt, daß auch

$$\Sigma m z = 0$$

sein muß.

Selbstverständlich gibt es für jeden Körper einen Punkt, welcher diesen Bedingungen genügt. Man nennt ihn den Schwerpunkt des Körpers oder auch den Massenmittelpunkt; denn man kann sich in ihm die gesamte Masse des Körpers vereinigt denken, da nur dieser Punkt unterstützt zu werden braucht, um der Schwerkraft das Gleichgewicht zu halten.

Liegt der Schwerpunkt nicht im Ursprung des Koordinatensystems, sondern hat er die Koordinaten ξ, η, ζ, so können wir die Koordinaten der einzelnen Massenpunkte

Digitized by Google

$$x = x_1 + \xi, \quad y = y_1 + \eta, \quad z = z_1 + \zeta$$

setzen. Wiederum muß dann gelten

$$\Sigma m x_1 = \Sigma m y_1 = \Sigma m z_1 = 0,$$

also auch

$$\Sigma m (x - \xi) = 0,$$

woraus folgt

$$\Sigma m x = \xi \Sigma m,$$

oder

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

Das sind die Formeln, nach welchen man den Schwerpunkt des Körpers findet.

§ 22. Schwerpunkt einer Linie.

Haben wir einen linienförmigen Körper, etwa einen Draht, dessen Längeneinheit die Masse μ besitzt, so ist für denselben

$$\Sigma m = \int \mu \, d l = \mu l,$$

$$\Sigma m x = \int \mu x \, d l,$$

wenn wir unter l die Länge des Körpers verstehen. Danach wird

$$\xi = \frac{\int x \, d l}{\int d l} = \frac{\int x \, d l}{l}.$$

Es liege z. B. ein Kreisbogen von der Länge l und dem Öffnungswinkel $2\varphi_0$ symmetrisch zur x-Achse in der (x, z)-Ebene. Für ihn ist $x = r \cos\varphi$, $d l = r \, d\varphi$, daher

$$\int x \, d l = \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} r^2 \cos\varphi \, d\varphi = 2 r^2 \sin\varphi_0$$

und

$$\xi = \frac{2 r^2 \sin\varphi_0}{l} = \frac{c r}{l},$$

Digitized by Google

wenn c die Länge der Sehne ist. Für den Halbkreis gilt somit, da $c = 2r$ und $l = \pi r$ ist,

$$\xi = \frac{2r}{\pi}.$$

§ 23. Schwerpunkt einer Fläche.

Nach demselben Vorgang wie bei einem linienförmigen Körper erhalten wir für einen flächenförmigen die Gleichung

$$\xi = \frac{\int x\,dF}{F},$$

wobei F die Fläche des Körpers bedeutet. Analoge Formeln ergeben sich für η und ζ.

Wir wollen z. B. aus einer Parabel, deren Gleichung

Fig. 3.

$$z^2 = 2px$$

ist, eine Fläche herausschneiden, welche von den Strecken a, c und dem Parabelbogen (Fig. 3) begrenzt ist. Wir finden

$$F = \int_0^a z\,dx = \int_0^a \sqrt{2p}\,\sqrt{x}\,dx = \tfrac{2}{3}\sqrt{2p}\,a\sqrt{a} = \tfrac{2}{3}\,a\,c,$$

ferner

$$\int x\,dF = \iint x\,dx\,dz = \int x\,z\,dx = \int x\sqrt{2px}\,dx = \tfrac{2}{5}\sqrt{2p}\,x^{\frac{5}{2}}.$$

Das ist zwischen den Grenzen 0 und a zu nehmen, daher

$$\int x\,dF = \tfrac{2}{5}\,a^2\,c$$

und

$$\xi = \frac{\int x\,dF}{F} = \tfrac{3}{5}\,a.$$

Digitized by Google

Gleicherweise finden wir

$$\zeta = \tfrac{3}{8} c .$$

Tragen wir ξ und ζ als Abszisse und Ordinate auf, so haben wir den Schwerpunkt S (Fig. 3) gefunden.

§ 24. Schwerpunkt eines Körpers.

Für einen Körper ist

$$\xi = \frac{\int x\, dV}{V}, \quad \eta = \frac{\int y\, dV}{V}, \quad \zeta = \frac{\int z\, dV}{V},$$

wobei V das Volumen des Körpers bedeutet.

Als Beispiel für eine derartige Schwerpunktsberechnung möge folgende Aufgabe gelöst werden. Es ist der Schwerpunkt eines Kugelsegments zu bestimmen. Die Gleichung der Kugel sei

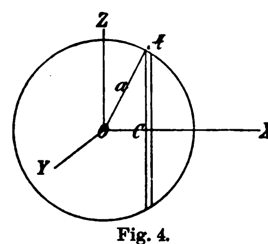


Fig. 4.

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 .$$

Wir legen durch den Punkt A (Fig. 4) eine Ebene senkrecht zur x-Achse und in der Entfernung dx eine Parallele dazu. Dadurch wird aus der Kugel eine Scheibe vom Volumen

$$\pi \overline{AC}^2 dx = \pi (a^2 - x^2) dx$$

herausgeschnitten. Das Volumen des Kugelsegments ist demnach

$$V = \pi \int_{\alpha}^{a} (a^2 - x^2) dx = \pi \left(\frac{2a^3}{3} - a^2 \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \right),$$

wobei α der kleinste Wert von x ist. Ferner haben wir zu bilden

Digitized by Google

$$\xi V = \iiint x \, dx \, dy \, dz = \int_{\alpha}^{a} \pi x (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= \pi \left(\frac{a^4}{4} - \frac{a^2 \alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} \right).$$

Betrachten wir den Fall der Halbkugel, so $\alpha = 0$, dann

$$\xi = \frac{3a}{8}.$$

§ 25. Guldins Theorem.

Wenn die ebene Kurve AB (Fig. 5) um die Achse ox rotiert, so erzeugt sie eine Rotationsfläche vom Inhalt

$$O = 2\pi \int z \, dl.$$

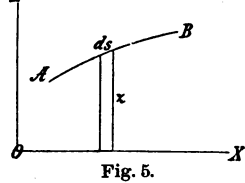


Fig. 5.

Für die Ordinate des Schwerpunkts gilt

$$\zeta = \frac{\int z \, dl}{l},$$

daher ist

$$O = 2\pi \zeta l.$$

Das heißt: Alle Kurven von derselben Länge und demselben Schwerpunkt erzeugen Rotationskörper gleicher Oberfläche.

Es rotiere z. B. ein Halbkreis (Fig. 6). Die dadurch entstehende Kugeloberfläche ist

$$4\pi a^2 = 2\pi \zeta \cdot \pi a = 2\pi^2 a \zeta,$$

woraus

$$\zeta = \frac{2a}{\pi}$$

folgt, was wir bereits im § 22 gefunden haben.

Fig. 6.

Durch die Rotation des Kreises (Fig. 7) erhält man einen Wulst. Dessen Oberfläche muß nach unserer

Digitized by Google

Regel

$$O = 2\pi b \cdot 2\pi c = 4\pi^2 bc$$

sein.

Lassen wir anstatt einer Kurve ein beliebig begrenztes Stück F der xz-Ebene um die x-Achse rotieren, so gilt für dessen Schwerpunktsordinate die Gleichung

$$\zeta F = \int z\,dx\,dz.$$

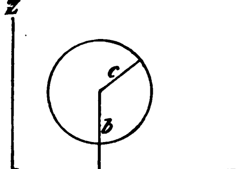


Fig. 7.

Das Volumen des Rotationskörpers ist

$$\iint 2\pi z\,dx\,dz = 2\pi\zeta F.$$

Als Beispiele dafür können uns die bereits betrachteten Fälle dienen. Der Inhalt der durch Rotation des Halbkreises (Fig. 6) entstehenden Kugel ist

$$\frac{4\pi a^3}{3} = 2\pi\zeta \cdot \frac{\pi a^2}{2},$$

woraus folgt

$$\zeta = \frac{4a}{3\pi}.$$

Für den Inhalt des Wulstes (Fig. 7) ergibt sich

$$2\pi b \cdot \pi c^2 = 2\pi^2 bc^2.$$

Diese Beziehung zwischen Oberfläche und Inhalt eines Rotationskörpers und der Schwerpunktordinate der erzeugenden Kurve resp. Fläche bildet den Inhalt des nach seinem Entdecker Guldin benannten Theorems.

§ 26. Ortsveränderung eines starren Körpers.

Jede Lagenänderung eines starren Körpers kann in zwei Vorgänge zerlegt werden, nämlich in eine Ortsveränderung des Schwerpunkts, wobei sich alle übrigen Punkte parallel zum Schwerpunkt und zu sich

Digitized by Google

selbst bewegen, und in eine Drehung um den Schwerpunkt.

Jedes Kräftesystem, das eine Resultierende gibt, die nur im Schwerpunkt angreift, wird nur eine Parallelverschiebung des Körpers bewirken können, aber keine Drehung, wie wir dies am Beispiel der Schwerkraft gesehen haben. Umgekehrt dürfen Kräfte, welche nur eine Drehung des Körpers um den Schwerpunkt hervorbringen sollen, keine Komponente besitzen, welche im Schwerpunkt angreift.

§ 27. **Kräftepaar.**

Zwei Kräfte, welche gleich groß und entgegengesetzt gerichtet an zwei verschiedenen Punkten eines Körpers angreifen, nennt man ein Kräftepaar. Dieses hat die Eigenschaft, keine Schwerpunktsbewegung bewirken zu können, was man unmittelbar aus einer virtuellen Parallelverschiebung des Körpers erkennt. Jede Kraft leistet dabei dieselbe Arbeit, aber in entgegengesetztem Sinn, d. h. die Gesamtarbeit ist gleich Null, bezüglich des Schwerpunkts befinden sich die Kräfte im Gleichgewicht. Die Drehung des Körpers muß um eine Achse vor sich gehen, welche durch den Schwerpunkt geht und senkrecht auf der Ebene des Kräftepaars steht, da keine Kraftkomponente parallel zur Achse vorhanden ist.

§ 28. **Drehungsmoment — Trägheitsmoment.**

Infolge des Kräftepaars AB (Fig. 8) dreht sich ein Körper um die Achse O, welche senkrecht zur Bildebene zu denken ist. A und B seien die Angriffspunkte der Kräfte P. Ihr Abstand von O sei a und b und die Senkrechten von O auf P entsprechend p_1 und p_2.

Digitized by Google

Wir lassen den Körper eine Drehung um den Winkel $\delta\varphi$ machen. Dabei leisten die Kräfte P die Arbeit

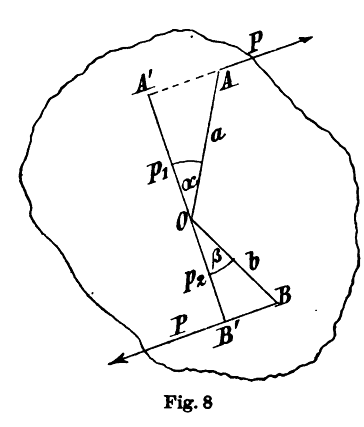


Fig. 8

$$\mathrm{P\,a}\,\delta\varphi\cos\alpha = \mathrm{P\,p_1}\,\delta\varphi$$

und

$$\mathrm{P\,b}\,\delta\varphi\cos\beta = \mathrm{P\,p_2}\,\delta\varphi.$$

Die Gesamtarbeit ist also

$$\mathrm{P(p_1 + p_2)}\delta\varphi = \mathrm{P\,p}\,\delta\varphi,$$

wenn wir mit p den Abstand A′B′ der parallelen Kräfte bezeichnen.

Nennen wir den Abstand eines Massenpunkts m von der Drehungsachse r, so beschreibt er den Weg

$$\mathrm{s} = \mathrm{r}\,\delta\varphi.$$

Die Kraft, welche auf ihn wirkt, ist gegeben durch

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{d^2 s}}{\mathrm{d\,t^2}} = \mathrm{m\,r}\frac{\mathrm{d^2}\varphi}{\mathrm{d\,t^2}}.$$

Das Produkt aus Kraft und Weg ergibt sodann die geleistete Arbeit $\mathrm{m\,r^2}\frac{\mathrm{d^2}\varphi}{\mathrm{d\,t^2}}\delta\varphi$. Die Summe davon für alle Massenpunkte muß gleich der Arbeit des Kräftepaars sein:

$$\Sigma\mathrm{m\,r^2}\frac{\mathrm{d^2}\varphi}{\mathrm{d\,t^2}}\delta\varphi = \mathrm{P\,p}\,\delta\varphi$$

oder

$$\frac{\mathrm{d^2}\varphi}{\mathrm{d\,t^2}}\Sigma\mathrm{m\,r^2} = \mathrm{P\,p}. \tag{17}$$

Die Größe Pp wird das Drehungsmoment des Kräftepaars genannt. Die Größe $\mathrm{m\,r^2}$, d. h. das Produkt

Digitized by Google

aus der Masse eines Punkts in das Quadrat seiner Entfernung von der Drehungsachse nennt man sein Trägheitsmoment. Die Summe aller Trägheitsmomente $\Sigma m r^2$ heißt dann das Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Achse O.

§ 29. Ähnlichkeiten zwischen geradliniger und drehender Bewegung.

Falls φ der Drehungswinkel ist, welchen ein Körper in einer bestimmten Zeit beschreibt, so können wir in Analogie zur geradlinigen Bewegung $\frac{d\varphi}{dt}$ seine Winkelgeschwindigkeit und $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ seine Winkelbeschleunigung nennen.

Für eine bestimmte Lage der Drehungsachse ist das Trägheitsmoment eine konstante Größe. Wir erfahren dann aus Gleichung (17), daß das Drehungsmoment einfach proportional der Winkelbeschleunigung zu setzen ist. Wir können also die drehende Bewegung eines Körpers mit der Bewegung eines Massenpunkts in vollständige Analogie bringen, wenn wir die Begriffe der Masse, Beschleunigung und Kraft durch jene des Trägheitsmoments, der Winkelbeschleunigung und des Drehungsmoments ersetzen.

Diese Analogie geht noch weiter. Projizieren wir die Fläche, welche der Radiusvektor eines Massenpunkts bei der Drehung um einen gewissen Winkel beschreibt, auf die drei Ebenen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems, so können wir die so erhaltenen Flächen als von Drehungen herrührend ansehen, welche der Punkt um die x-, y- und z-Achse macht. Es sind das also die drei Komponenten, während umgekehrt die ursprüng-

Digitized by Google

liche Drehung die Resultierende dieser drei Komponenten ist.

Dasselbe gilt auch für das Drehungsmoment Pp. Wir können es durch ein Rechteck von den Seiten P und p darstellen. Die Projektionen auf die drei Koordinatenebenen bilden dann wieder Parallelogramme, deren Fläche die Größe der Drehungsmomente um die x-, y- und z-Achse darstellt.

Unsere Gleichung (17) sagt gar nichts darüber aus, wo die Angriffspunkte der Kräfte zu liegen haben und wie diese gerichtet sind. Daraus geht ohne weiteres hervor, daß man ein Kräftepaar, ohne seine Wirkung zu ändern, in jeder Weise verschieben kann, wofern nur die Normale zu seiner Ebene immer dieselbe Richtung behält.

§ 30. **Kräfte, welche nicht im Schwerpunkt eines starren Körpers angreifen.**

Wir lassen nun ganz allgemein eine Kraft K (Fig. 9) in einem beliebigen Punkt A eines starren Körpers von der Masse M angreifen. Im Schwerpunkt S bringen wir zwei neue Kräfte K′ und K″ an, welche entgegengesetzt gerichtet, im übrigen jedoch der Kraft K parallel und gleich sein sollen. Infolge der Kraft K′ = K wird der Körper eine fortschreitende Bewegung erhalten, für welche wir die Gleichungen aufstellen können, als wäre die ganze Masse M im Schwerpunkt vereinigt. Gleichzeitig erhält der Körper aber auch durch das Kräftepaar KAS eine Drehung um den Schwerpunkt, wie sie durch Gleichung (17) dargestellt wird.

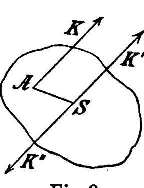


Fig. 9.

Digitized by Google

Die Kraft K habe die Komponenten X, Y, Z, der Angriffspunkt die Koordinaten x, y, z, der Schwerpunkt des Körpers falle mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen. Die Kraft X erzeugt somit um die y-Achse ein Drehungsmoment Xz, um die z-Achse das Moment $-Xy$. Ähnlich verhält es sich mit den Kräften Y und Z, so daß wir um die x-Achse das Drehungsmoment

$$Zy - Yz$$

und gleicherweise um die y-Achse das Moment

$$Xz - Zx$$

und um die z-Achse

$$Yx - Xy$$

erhalten. Wir müssen nämlich ein Drehungsmoment positiv oder negativ setzen, je nachdem es, gegen den Ursprung des Koordinatensystems betrachtet, eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers oder eine entgegengesetzte hervorbringt.

§ 31. **Steiners Satz.**

Wir nahmen bisher an, der Körper sei völlig frei beweglich und die Drehung geschehe um den Schwerpunkt. Wir wollen jetzt den Körper so lagern, daß er sich nur um eine feste Achse drehen kann. Genau wie im § 28 können wir auch für den jetzigen Fall die Gleichung (17) ableiten, nur bezieht sich dann das Trägheitsmoment $\Sigma m r^2$ auf die feste Drehungsachse des Körpers.

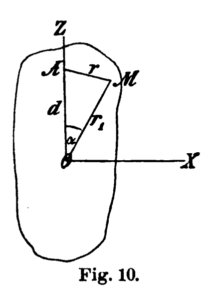


Fig. 10.

Wir hängen einen Körper in einem beliebigen Punkt A (Fig. 10) so auf, daß er sich nur um eine

Digitized by Google

Achse senkrecht zur Bildebene drehen kann. Wir suchen bezüglich dieser Achse A das Trägheitsmoment $\Sigma m r^2$.

Den Schwerpunkt O machen wir zum Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems. Die z-Achse geht also durch A und es sei $OA = d$. Dann ist

$$r^2 = r_1^2 + d^2 - 2 r_1 d \cos\alpha ,$$

und das Trägheitsmoment

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m r_1^2 + d^2 \Sigma m - 2 d \Sigma m r_1 \cos\alpha .$$

Nun ist aber $\Sigma m = M$, d. i. gleich der Masse des Körpers, während

$$\Sigma m r_1 \cos\alpha = \Sigma m z = 0$$

ist, da die Koordinatenachse durch den Schwerpunkt geht. Es bleibt also

$$\Sigma m r^2 = \Sigma m r_1^2 + M d^2 .$$

Das Trägheitsmoment um eine willkürliche Achse setzt sich also aus zwei Trägheitsmomenten zusammen. Das eine $M d^2$ wäre vorhanden, wenn wir uns die gesamte Masse des Körpers im Schwerpunkt vereinigt dächten. Dazu kommt noch ein Trägheitsmoment bezüglich einer Achse, die durch den Schwerpunkt des Körpers geht und zur eigentlichen Drehungsachse parallel ist. Dieser Satz rührt von Steiner her.

§ 32. Physisches Pendel — reduzierte Pendellänge.

Ein starrer Körper soll sich nur um die y-Achse drehen können. Das Drehungsmoment ist dann nach § 30 $Xz - Zx$. Drehende Kraft sei nur die Schwere. Ein Massenpunkt verursacht daher die Kraftkomponenten

$$X = 0, \quad Z = -mg,$$

die ein Drehungsmoment mgx erzeugen. Das gesamte Drehungsmoment des Körpers wird also

$$\Sigma m g x = g M \xi$$

Digitized by Google

sein, wenn M seine Masse und ξ die Schwerpunktsabszisse ist.

Nach (17) gilt nun die Gleichung

$$K \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = g M \xi,$$

wenn wir das Trägheitsmoment des Körpers $\Sigma m r^2 = K$ setzen. Ist der Abstand des Schwerpunkts von der Drehungsachse a und schließt sein Radiusvektor mit der z-Achse den Winkel φ ein, so $\xi = a \sin \varphi$, der Winkel mit der negativen z-Achse $\psi = \pi - \varphi$. Die Gleichung wird jetzt

$$\frac{d^2 \psi}{d t^2} = -\frac{g M a}{K} \sin \psi .$$

Das ist aber genau dieselbe Gleichung, wie wir sie für das einfache Pendel in § 9 erhalten haben, wenn wir $\frac{g M a}{K}$ durch $\frac{g}{l}$ ersetzen. Wir nennen daher einen in dieser Weise schwingenden Körper ein physisches Pendel im Gegensatz zum einfachen oder mathematischen Pendel.

Dieses hat eine Schwingungsdauer

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

das physische hingegen

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{K}{g M a}} .$$

Für gleiche Schwingungsdauern muß also

$$l = \frac{K}{M a}$$

sein, weshalb man diese Größe auch die reduzierte Pendellänge nennt.

Digitized by Google

§ 33. Reversionspendel.

Wir wissen bereits, daß das Trägheitsmoment

$$K = T + M a^2$$

ist, wobei wir unter T das Trägheitsmoment bezüglich einer parallelen Achse durch den Schwerpunkt verstehen.

Die reduzierte Pendellänge ist demnach

$$l = \frac{K}{M a} = \frac{T}{M a} + a .$$

Zur Bestimmung von a erhalten wir eine quadratische Gleichung

$$a^2 - a l + \frac{T}{M} = 0 . \qquad (18)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien a_1 und a_2. Ziehe ich daher um den Schwerpunkt zwei Kreise mit den Radien a_1 und a_2, so hat der Körper für jeden Aufhängepunkt, der in eine solche Kreisperipherie fällt, dieselbe Schwingungsdauer, deren reduzierte Pendellänge, wie aus (18) folgt, $l = a_1 + a_2$ ist.

Sucht man daher zwei Punkte auf, welche mit dem Schwerpunkt in einer Geraden liegen, vom Schwerpunkt verschiedene Entfernung haben, aber gleiche Schwingungsdauer bewirken, so ist der Abstand dieser Punkte die reduzierte Pendellänge. Ein solches Pendel nennt man ein Reversionspendel, und es dient dazu, die Beschleunigung der Schwere g zu ermitteln.

Kenne ich den Schwerpunkt, so ist mir auch a_1 und a_2, folglich auch nach der Gleichung

$$\frac{T}{M} = a_1 a_2 ,$$

welche aus (18) folgt, das Trägheitsmoment bekannt.

Digitized by Google

§ 34. Trägheitsmoment eines Parallelepipeds.

Wir nehmen den Mittelpunkt des Parallelepipeds als Ursprung eines Koordinatensystems an, dessen Achsen parallel den Kanten des Parallelepipeds liegen. Die Drehachse gehe durch den Mittelpunkt parallel zur y-Achse. Das Trägheitsmoment $\Sigma m r^2$ ist daher gegeben durch

$$T = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c} \varrho (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{8abc\varrho}{3}(a^2 + c^2)$$
$$= \frac{M}{3}(a^2 + c^2),$$

wenn wir die Kanten des Parallelepipeds 2 a, 2 b und 2 c nennen, ein Massenteilchen

$$m = \varrho\, dx\, dy\, dz$$

setzen, wobei ϱ also die Masse der Volumeinheit, die Dichte des Körpers ist, und überlegen, daß $r^2 = x^2 + z^2$ ist.

Wir nehmen nun an, das Prisma sei sehr schmal, so daß a gegenüber c vernachlässigt werden kann. Dann ist

$$T = \frac{M c^2}{3}.$$

Für dieses Prisma suchen wir zwei Aufhängepunkte, die ein Reversionspendel ergeben. Nach Gleichung (18) haben wir

$$a^2 - l a + \frac{c^2}{3} = 0,$$

$$a = \frac{l + \sqrt{l^2 - \frac{4c^2}{3}}}{2}.$$

Digitized by Google

Ist die Gesamtlänge des Stabes $2c = L$, so erhalten wir für a nur dann einen möglichen Wert, wenn

$$\frac{L^2}{3} < l^2 .$$

Ferner muß aber auch

$$\frac{L}{2} > a$$

sein, woraus für ein Pendel von gegebener Schwingungsdauer ganz bestimmte Grenzen der Stablänge folgen. Für ein Sekundenpendel liegen dieselben zwischen ungefähr 150 und 170 cm.

§ 35. Trägheitsmoment einer Kugel.

Der Mittelpunkt der Kugel sei wiederum der Ursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems. Wegen der allseitigen Symmetrie ist natürlich für jede Achse durch den Mittelpunkt das Trägheitsmoment dasselbe. Für eine Kugelschale vom Radius r gilt daher

$$T = \Sigma m (y^2 + z^2) = \Sigma m (x^2 + z^2) = \Sigma m (x^2 + y^2) .$$

Alle drei Summen addiert, ergibt

$$3T = 2 \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2) = 2 \Sigma m r^2 ,$$

oder

$$T = \tfrac{2}{3} \Sigma m r^2 .$$

Dehnen wir dieses Resultat auf die Vollkugel aus, so können wir

$$m = 4 \pi \varrho r^2 dr$$

setzen, und es wird

$$\Sigma m r^2 = 4 \pi \varrho \int_0^r r^4 dr = \tfrac{4}{5} \pi \varrho r^5 ,$$

wenn r der Radius der Vollkugel ist. Die Masse dieser Kugel ist

$$M = \tfrac{4}{3} \pi \varrho r^3 .$$

Digitized by Google

Das Trägheitsmoment der Vollkugel kann daher auch geschrieben werden

$$T = \tfrac{2}{3} \Sigma m r^2 = \tfrac{2}{5} M r^2 .$$

Hängen wir demnach eine Kugel an einem sehr dünnen Draht von der Länge L auf, dessen Masse gegenüber jener der Kugel vernachlässigt werden kann, so wird die reduzierte Pendellänge

$$l = \frac{K}{M a} = \frac{\tfrac{2}{5} M r^2 + (L + r)^2 M}{M (L + r)} = L + r + \frac{2}{5} \frac{r^2}{L + r} .$$

Es ist die reduzierte Pendellänge also größer als die Entfernung des Kugelmittelpunkts vom Aufhängepunkt, doch wird der Unterschied für eine kleine Kugel sehr gering.

§ 36. Trägheitsmoment um eine beliebige Achse — Trägheitsellipsoid.

Die Achse O A (Fig. 11) werde als Drehungsachse gewählt. Sie bilde mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ. Ein Massenpunkt m habe die Koordinaten x, y, z, also $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, und es schließe r mit O A den Winkel ϑ ein. p sei die Entfernung des Punkts m von der Drehachse. Dann ist das Trägheitsmoment

$$\Sigma m p^2 = \Sigma m r^2 \sin^2 \vartheta = \Sigma m (r^2 - r^2 \cos^2 \vartheta) .$$

Fig. 11.

Wir wissen weiter, daß

$$\cos \vartheta = \frac{x}{r} \cos \alpha + \frac{y}{r} \cos \beta + \frac{z}{r} \cos \gamma ,$$

wonach wir für das Trägheitsmoment erhalten

$$K = \Sigma m (r^2 - r^2 \cos^2 \vartheta)$$
$$= \Sigma m (x^2 + y^2 + z^2 - x^2 \cos^2 \alpha - y^2 \cos^2 \beta - z^2 \cos^2 \gamma$$
$$- 2 yz \cos\beta \cos\gamma - 2 zx \cos\gamma \cos\alpha - 2 xy \cos\alpha \cos\beta) .$$

Bedenken wir noch, daß

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 ,$$

also

$$x^2 - x^2 \cos^2 \alpha = x^2 \cos^2 \beta + x^2 \cos^2 \gamma$$

usw. ist, so können wir das Trägheitsmoment leicht auf die Form bringen

$$K = \cos^2 \alpha \, \Sigma m (y^2 + z^2) + \cos^2 \beta \, \Sigma m (z^2 + x^2)$$
$$+ \cos^2 \gamma \, \Sigma m (x^2 + y^2) - 2 \cos\beta \cos\gamma \, \Sigma m y z$$
$$- 2 \cos\gamma \cos\alpha \, \Sigma m z x - 2 \cos\alpha \cos\beta \, \Sigma m x y .$$

Wir wollen nun von O aus auf der Achse OA die Strecke

$$ON = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

abschneiden. Es ist daher

$$\frac{1}{\overline{ON}^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2 D \cos\beta \cos\gamma$$
$$- 2 E \cos\gamma \cos\alpha - 2 F \cos\alpha \cos\beta .$$

Wir haben hier $\Sigma m (y^2 + z^2) = A$ usw. gesetzt.

Für N seien die Koordinaten ξ, η, ζ, also $ON \cos\alpha = \xi$, usw. Dann folgt für unsere Gleichung, wenn wir beide Seiten mit $\overline{ON}^2$ multiplizieren,

$$1 = A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 - 2 D \eta \zeta - 2 E \zeta \xi - 2 F \xi \eta .$$

Das ist die Gleichung eines Ellipsoids. Ein Hyperboloid kann sie nicht darstellen, weil sonst auch Trägheitsmomente von beliebig kleiner Größe vorhanden sein müßten, was ein Widerspruch wäre.

Digitized by Google

Fallen die Koordinatenachsen mit den Achsen des Ellipsoids zusammen, so erhalten wir eine einfachere Gleichung, welche nur die Glieder mit ξ^2, η^2 und ζ^2 enthält.

Für einen jeden Körper ist also für jede beliebige Drehungsachse durch obiges Ellipsoid das Trägheitsmoment gegeben, weshalb man es auch das Trägheitsellipsoid nennt. Dasselbe kann für spezielle Fälle natürlich auch ein Rotationsellipsoid oder eine Kugel sein. Die drei Achsen des Ellipsoids nennt man die Hauptachsen des Trägheitsmoments oder kürzer die Hauptachsen der Trägheit.

§ 37. Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt — Eulersche Gleichungen.

Wir machen den festen Punkt, um welchen die Drehung des Körpers stattfinden soll, zum Koordinatenursprung eines rechtwinkeligen Koordinatensystems. Die Winkelgeschwindigkeit w habe die Komponenten p, q, r. Die Bewegung, welche ein Punkt infolge einer kleinen Drehung um die x-Achse macht, ergibt sich leicht aus Fig. 12. In derselben ist die x-Achse senkrecht zur Bildebene gedacht. In der Zeit d t gelange der Punkt M nach M′. Diesen Weg zerlegen wir in die Komponenten M P parallel zur y-Achse und P M′ parallel zur z-Achse. Nun ist

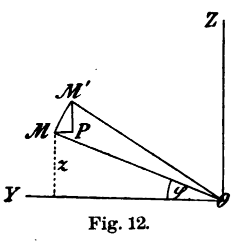


Fig. 12.

$$MP = -\overline{MM'} \cdot \sin\varphi = -\overline{OM}\, p\, dt \sin\varphi = -z\, p\, dt,$$

da $\overline{OM} \sin\varphi = z$ die Ordinate des Punktes M ist.

Digitized by Google

Gleicherweise ergibt sich parallel zur z-Achse

$$\overline{PM'} = y\,p\,dt.$$

Auf analoge Weise können wir die Drehungen um die y- und x-Achse in Bewegungen parallel zu den drei Achsen zerlegen.

Infolge sämtlicher drei Drehungen wird also der Punkt eine Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt}$ parallel zur x-Achse usw. erlangen, welche wir leicht erhalten, wenn wir den gesamten Weg parallel zur Achse durch die Zeit dt dividieren. Das Ergebnis ist

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry,$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - pz,$$

$$\frac{dz}{dt} = py - qx.$$

Erinnern wir uns nun, daß das Drehungsmoment um die x-Achse durch $Zy - Yz$ (§ 30) gegeben ist, wobei $Y = \Sigma m \frac{d^2 y}{dt^2}$ und $Z = \Sigma m \frac{d^2 z}{dt^2}$ ist, so können wir die Bewegungsgleichungen des Körpers finden, wenn wir unsere Werte für $\frac{dx}{dt}$ usw. benutzen.

Wir bilden vorerst

$$\begin{aligned} y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} &= py^2 - qxy - rxz + pz^2 \\ &= p(y^2 + z^2) - x(qy + rz) \\ &= p(x^2 + y^2 + z^2) - x(px + qy + rz) \\ &= p\varrho^2 - x(px + qy + rz), \end{aligned}$$

wobei $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$ gesetzt wurde.

Digitized by Google

Durch Differentiation dieser Gleichung nach t erhalten wir nun

$$y\frac{d^2 z}{d t^2} - z\frac{d^2 y}{d t^2}$$

$$= \frac{dp}{dt}\varrho^2 - \frac{dx}{dt}(px + qy + rz) - x\left(x\frac{dp}{dt} + y\frac{dq}{dt} + z\frac{dr}{dt}\right).$$

Das Glied

$$p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} + r\frac{dz}{dt} = 0.$$

Es sind nämlich $\frac{p}{w}$, $\frac{q}{w}$, $\frac{r}{w}$ die Richtungskosinus der Drehungsachse, und das vernachlässigte Glied stellt demnach nichts anderes als die mit w multiplizierte Geschwindigkeit parallel dieser Achse dar. Eine solche Geschwindigkeit ist aber nicht vorhanden.

Wir setzen nun anstatt $\frac{dx}{dt}$ wieder seinen Wert $qz - ry$ ein, multiplizieren aus, summieren über sämtliche Massenpunkte und lassen die Koordinatenachsen mit den drei Hauptträgheitsachsen zusammenfallen. Für diesen Fall werden alle Glieder, welche die Koordinaten nicht als Quadrate enthalten, gleich Null, und es bleibt uns nur

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2 z}{dt^2} - z\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = \frac{dp}{dt}\Sigma m(y^2 + z^2) + qr\Sigma m(y^2 - z^2).$$

Nennen wir nun die Drehungsmomente um die drei Achsen L, M, N, die Trägheitsmomente A, B, C, so erhalten wir die drei Gleichungen

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L,$$

Digitized by Google

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M, \qquad (19)$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N.$$

Wir können nämlich $\Sigma m(y^2 - z^2) = \Sigma m(x^2 + y^2 - x^2 - z^2)$ $= C - B$ setzen.

Diese Gleichungen wurden von Euler aufgestellt. Sie setzen voraus, daß die Trägheitsmomente A, B, C konstante Größen sind. Das wird aber, wenn die Drehungsachse mit der Zeit ihre Lage ändert, im allgemeinen nicht der Fall sein. Dem können wir aber ausweichen, wenn wir einfach nach dem Vorgang Eulers während der Rotation des Körpers das Koordinatensystem sich ebenfalls so bewegen lassen, daß die Bedingung konstanter Trägheitsmomente erhalten bleibt.

§ 38. Freie Achse.

Ein Körper drehe sich sehr rasch um die z-Achse, habe hingegen sehr geringe Winkelgeschwindigkeiten um die x- und y-Achse. Es ist also r gegen p und q sehr groß, so daß wir das Produkt pq gegen r vernachlässigen können. Ferner soll an unserm Körper kein Drehungsmoment angreifen, also $L = M = N = 0$ sein. Wir erhalten dann aus den Gleichungen (19)

$$C\frac{dr}{dt} = 0,$$

$$r = \text{const.}$$

Setzen wir nun

$$\frac{C - B}{A} r = \lambda, \quad \frac{A - C}{B} r = \mu,$$

Digitized by Google

so ergibt sich weiter

$$\frac{dp}{dt} + \lambda q = 0,$$

$$\frac{dq}{dt} + \mu p = 0.$$

Differenzieren wir die erste Gleichung nach t, so

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \lambda \frac{dq}{dt} = 0,$$

und für $\frac{dq}{dt}$ seinen Wert aus der zweiten Gleichung eingesetzt,

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = \lambda \mu p.$$

Nach dieser Gleichung ist p eine periodische Funktion der Zeit, wenn $\lambda \mu$ negativ ist, eine exponentielle, wenn $\lambda \mu$ positv (§§ 9, 10). In letzterem Fall wird unsere Gleichung aber wertlos, da wir sie ja unter der Bedingung abgeleitet haben, daß p immer klein bleibe. Wir haben also lediglich zu untersuchen, wann $\lambda \mu = \frac{(C-B)(A-C) r^2}{AB}$ negativ ist. Dies trifft in zwei Fällen zu, entweder wenn $C > \frac{A}{B}$, oder wenn $C < \frac{A}{B}$ ist. Das eine Mal ist also die Rotationsachse die größte Hauptachse der Trägheit, das andere Mal die kleinste.

In diesen beiden Fällen kann ein rasch rotierender Körper kleine Stöße und sonstige Störungen erleiden, ohne daß dadurch seine Rotationsachse eine wesentliche Lagenänderung erleidet, sondern sie macht nur kleine Schwankungen um ihre ursprüngliche Lage. Ein solcher Körper behält also seine Lage im wesentlichen bei; wir sagen, er rotiert um eine freie Achse.

Digitized by Google

Jeder Rotationskörper hat als Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid. Wir können daher, wenn wir die Achse des Körpers als Drehungsachse mit der Winkelgeschwindigkeit r wählen, A = B setzen und erhalten strenge

$$C \frac{dr}{dt} = 0 .$$

Die Achse eines solchen Körpers können wir also nach Belieben drehen und wenden, ohne seine Winkelgeschwindigkeit zu verändern.

§ 39. Kreiselbewegung — Präzession — Nutation.

Ein rechtwinkeliges Koordinatensystem OXYZ (Fig. 13) legen wir fest, so daß die Z-Achse vertikal

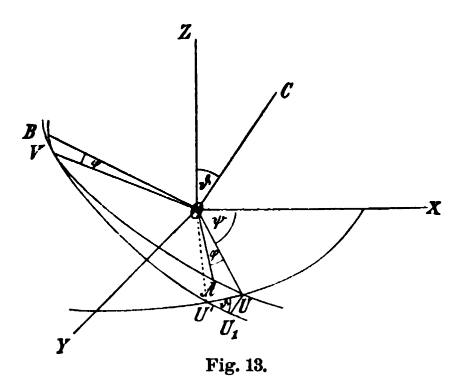


Fig. 13.

steht. O sei der Unterstützungspunkt des Kreisels. Er drehe sich um die Achse OC, welche die eine Achse des beweglichen Koordinatensystems sein und mit OZ den Winkel ϑ einschließen soll. OA und OB seien die beiden andern Achsen. Die Gerade, in welcher die AB-Ebene die

Digitized by Google

XY-Ebene schneidet, nennen wir OU, eine zweite Gerade senkrecht auf OU in der AB-Ebene OV. OU bilde mit OX den Winkel ψ, mit OA den Winkel φ; diesen Winkel bildet auch OV mit OB. Es gehören nun zu den Achsen OA, OB, OC die Winkelgeschwindigkeiten des Kreisels p, q, r; zu den Achsen OU und OV die Winkelgeschwindigkeiten u und v.

Bei einer Drehung um OC ändert sich in der Zeit dt bloß der Winkel φ um r dt, bei der Drehung um OU nur der Winkel ϑ um u dt, bei der Drehung um OV der Winkel ψ um

$$\overline{UU'} = \frac{\overline{UU_1}}{\sin\vartheta} = \frac{v\,dt}{\sin\vartheta},$$

der Winkel φ um

$$-\overline{U_1U'} = -\overline{UU'}\cos\vartheta = -\frac{v\,dt}{\sin\vartheta}\cos\vartheta.$$

Wir erhalten demnach folgende Winkelgeschwindigkeiten:

$$\frac{d\varphi}{dt} = r - \frac{v\cos\vartheta}{\sin\vartheta},$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = u,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{v}{\sin\vartheta},$$

oder

$$u = \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$v = \sin\vartheta\frac{d\psi}{dt},$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta.$$

Digitized by Google

Die Winkelgeschwindigkeiten p und q setzen sich bloß aus den Winkelgeschwindigkeiten u und v zusammen, welche um Achsen in derselben Ebene O U A V B vorhanden sind. Danach ist

$$p = u \cos\varphi + v \sin\varphi ,$$
$$q = v \cos\varphi - u \sin\varphi .$$

Wir bilden nun die kinetische Energie K unseres Kreisels. Sie ist gleich der Summe der Energien um drei aufeinander senkrechte Achsen (§§ 13, 29) und wird dargestellt durch das halbe Produkt aus dem Trägheitsmoment in das Quadrat der Winkelgeschwindigkeit, also

$$K = \tfrac{1}{2}(A p^2 + B q^2 + C r^2) .$$

Wir setzen voraus, der Kreisel sei ein Rotationskörper, somit $A = B$ und

$$K = \tfrac{1}{2} A (p^2 + q^2) + \tfrac{1}{2} C r^2 = \tfrac{1}{2} A (u^2 + v^2) + \tfrac{1}{2} C r^2 .$$

Führen wir die Winkel ϑ, φ, ψ ein, so wird

$$K = \frac{A}{2}\left[\sin^2\vartheta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} C r^2 .$$

Auf unsern Kreisel wirke nur die Schwerkraft. Dieselbe erzeugt ein Drehungsmoment $M g a \sin\vartheta$, wenn M die Masse, a der Abstand des Schwerpunkts vom Unterstützungspunkt O des Kreisels ist.

Die geleistete Arbeit muß immer gleich der Änderung der kinetischen Energie sein, also

$$d K = M g a \sin\vartheta \, d\vartheta ,$$

was integriert

$$K = C_1 - M g a \cos\vartheta = C_1 - D \cos\vartheta$$

ergibt, wenn wir $M g a = D$ einführen. Setzen wir den Wert für K ein, so erhalten wir die Gleichung

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2} A \left[\sin^2\vartheta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right] + \tfrac{1}{2} C r^2 = C_1 - D \cos\vartheta ,$$

und da $\frac{1}{2} C r^2$ ebenfalls konstant ist, indem wir ja kein Drehungsmoment um die OC-Achse haben, so wird unsere Gleichung

$$\sin^2\vartheta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = C_2 - \frac{2D}{A} \cos\vartheta . \qquad (20)$$

Die Schwere kann natürlich kein Drehungsmoment um eine Vertikalachse hervorbringen. Es muß deshalb die Bewegungsgröße des Kreisels auf eine Vertikalachse bezogen eine konstante Größe bleiben. Als solche haben wir hier das Produkt aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit einzuführen (§ 29), erhalten für unser Beispiel demnach

$$C r \cos\vartheta + A v \sin\vartheta = C_3 ,$$

und für v seinen obigen Wert wieder eingesetzt,

$$A \sin^2\vartheta \frac{d\psi}{dt} + C r \cos\vartheta = C_3 . \qquad (21)$$

Für $t = 0$ bilde die Kreiselachse mit der Z-Achse den Winkel ϑ_0. Ferner sei $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ und $\frac{d\psi}{dt} = 0$. Für diese Werte wird Gleichung (20)

$$C_2 = \frac{2D}{A} \cos\vartheta_0$$

und Gleichung (21)

$$C_3 = C r \cos\vartheta_0 .$$

Mit Einführung dieser Ausdrücke für die Konstanten C_2 und C_3 in die Gleichungen (20) und (21) erhalten wir nun

$$\sin^2\vartheta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{2D}{A} (\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) , \qquad (22)$$

Digitized by Google

$$\sin^2\vartheta \frac{d\psi}{dt} = \frac{Cr}{A}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta). \qquad (23)$$

Aus Gleichung (22) folgt, daß beständig $\cos\vartheta_0 > \cos\vartheta$ sein muß, da alle übrigen Größen dieser Gleichung positiv sind. Damit folgt aber nach (23) auch für $\frac{d\psi}{dt}$ ein positiver Wert, d. h. die Achse des Kreisels dreht sich beständig im selben Sinn um die Vertikalachse. Aus (22) und (23) können wir leicht finden

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \pm\sqrt{(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\left[\frac{2D}{A} - \frac{C^2 r^2}{A^2 \sin^2\vartheta}(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\right]}.$$

Es wird demnach mit wachsender Zeit ϑ zuerst zunehmen, bis es einen gewissen Wert erreicht hat, bei welchem $\frac{d\vartheta}{dt}$ gleich Null, weiterhin dann negativ wird. Das negative Vorzeichen der Wurzel springt wieder in das positive um, sobald ϑ wieder ϑ_0 geworden ist. ϑ ist daher eine periodische Funktion der Zeit. Dasselbe finden wir aber dann auch für den Winkel ψ. Unsere Kreiselachse macht zwei Bewegungen. Die Winkelbewegung $\frac{d\vartheta}{dt}$ nennen wir die Nutation, $\frac{d\psi}{dt}$ die Präzession des Kreisels.

Ist der Kreisel im Schwerpunkt unterstützt, so ist $a = 0$, also auch $D = 0$, dann muß konstant $\vartheta = \vartheta_0$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ und $\frac{d\psi}{dt} = 0$ bleiben. Ein solcher Kreisel zeigt weder Präzession noch Nutation. In gleicher Weise kann ϑ von ϑ_0 um so weniger verschieden werden, je größer die Winkelgeschwindigkeit r des Kreisels ist.

Digitized by Google

Wir können daher bei einem rasch rotierenden Kreisel zwar die Präzession, nicht aber die Nutation beobachten.

Bilden wir durch Division von $\frac{d\vartheta}{dt}$ durch $\frac{d\psi}{dt}$ den Ausdruck $\frac{d\vartheta}{d\psi}$, so erhalten wir die Gleichung der Bahn, welche der Schwerpunkt beschreibt. Projizieren wir dieselbe auf eine Horizontalebene, so nimmt dieselbe, wie wir aus der Diskussion der Gleichung leicht erkennen, die in Fig. 14 wiedergegebene Gestalt an.

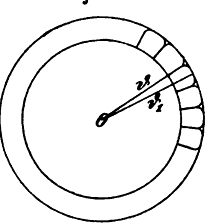


Fig. 14.

Unsere Erde ist ebenfalls ein Kreisel, und da die Anziehungskraft der Sonne, weil die Erde keine vollkommene Kugel ist, ihren Angriffspunkt nicht in deren Schwerpunkt hat, so zeigt auch die Erdachse die bekannte Erscheinung der Präzession und Nutation.

Auch eine Bewegung ohne Nutation ist möglich. Dividieren wir nämlich (22) durch (23), so erhalten wir

$$\frac{\sin^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2}{\sin^2\vartheta\,\frac{d\psi}{dt}} = \frac{2D}{Cr}.$$

Nehmen wir jetzt an, daß keine Nutation vorhanden, d. h. daß $\vartheta = \text{const.}$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ ist, so ergibt dies

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{2D}{Cr}.$$

In diesem Fall bewegt sich also die Kreiselachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Vertikale.

Digitized by Google

Mechanik nichtstarrer Punktsysteme.

§ 40. Prinzip der Erhaltung des Schwerpunkts.

Wir erwähnten bereits, daß wir alle Lehrsätze, welche wir für einen Massenpunkt gefunden haben, ohne weiteres auf ein System von Punkten anwenden können, falls wir nur für jeden einzelnen auch alle auf ihn wirkenden Kräfte in unseren Formeln berücksichtigen (§ 20). Wir werden daher die Bewegungsgleichungen eines Punktsystems schreiben können

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{d t^2} = \Sigma X, \quad \Sigma m \frac{d^2 y}{d t^2} = \Sigma Y, \quad \Sigma m \frac{d^2 z}{d t^2} = \Sigma Z.$$

Sind nun gar keine Kräfte vorhanden, so

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{d t^2} = \Sigma m \frac{d^2 y}{d t^2} = \Sigma m \frac{d^2 z}{d t^2} = 0.$$

Integrieren wir, so resultiert

$$\Sigma m \frac{d x}{d t} = \frac{d}{d t} \Sigma m x = M \frac{d \xi}{d t} = C.$$

Ähnliche Gleichungen ergeben sich für die übrigen Koordinaten. Wir sehen daraus, daß die Geschwindigkeit und Richtung des Schwerpunkts unseres Systems völlig unverändert bleibt, sobald keine Kräfte auf die Punkte einwirken.

Wir können aber diesen Satz noch erweitern. ΣX usw. wird nämlich ebenfalls gleich Null, wenn nur innere Kräfte vorhanden sind, d. h. Kräfte, welche die Punkte des Systems aufeinander ausüben. Die Komponenten einer jeden solchen Kraft kommen dann immer zweimal, einmal positiv und einmal negativ, in den Summen vor, sie tilgen sich also gegenseitig. Der Satz, daß sich der Schwerpunkt eines Systems, auf

Digitized by Google

welches keine äußeren Kräfte einwirken, mit konstanter Richtung und Geschwindigkeit bewegt, nennt man das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunkts.

Dasselbe läßt sich auf unzählige bekannte Bewegungserscheinungen anwenden. Ist der Schwerpunkt von vornherein in Ruhe, so bleibt er es auch weiterhin. Feuern wir aus einem sehr leicht beweglichen Geschütz ein Geschoß ab, so erhält das Geschütz den sogenannten Rückstoß. Der gemeinsame Schwerpunkt von Geschoß und Geschütz bleibt bei vollständig freier Beweglichkeit beider vor und nach dem Schuß unbeweglich an derselben Stelle. Explodiert ein fliegendes Geschoß, so bewegt sich der Schwerpunkt sämtlicher Sprengstücke genau so weiter, als es das unversehrte Geschoß getan hätte.

Auf dem Satz der Erhaltung des Schwerpunkts basieren alle sogenannten Reaktionserscheinungen.

§ 41. Prinzip der Erhaltung der Flächenräume.

Das Drehungsmoment, welches ein Punktsystem um die x-Achse eines Koordinatensystems erhält, läßt sich durch die Gleichung

$$\Sigma (Z y - Y z) = \Sigma m \left(\frac{d^2 z}{d t^2} y - \frac{d^2 y}{d t^2} z \right)$$

$$= \frac{d}{d t} \Sigma m \left(\frac{d z}{d t} y - \frac{d y}{d t} z \right)$$

darstellen (§ 30). Sind keine äußeren Kräfte vorhanden, so sind nach dem vorigen Paragraphen die Komponenten Y und Z gleich Null, daher ist

$$\Sigma m \left(\frac{d z}{d t} y - \frac{d y}{d t} z \right) = C .$$

Digitized by Google

$\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z$ ist nichts anderes als die doppelte Fläche, welche der Radiusvektor in der Zeiteinheit beschreibt, oder kurz die doppelte Flächengeschwindigkeit. Analog nennen wir den Ausdruck $m\left(\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z\right)$ das doppelte Flächenmoment des Punktes m bezügl. der X-Achse. Wir erhalten demnach den Satz, daß die Summe aller Flächenmomente beim Fehlen äußerer Kräfte eine konstante Größe ist. Man nennt dies das Prinzip der Erhaltung der Flächenräume.

Ein Beispiel dafür lernten wir in der Planetenbewegung kennen (§ 16). Infolge der Erhaltung der Flächenräume fällt eine Katze immer auf die Füße. Indem sie nämlich während des Fallens mit den Füßen eine drehende Bewegung beschreibt, zwingt sie ihren Körper, sich entgegengesetzt zu drehen.

§ 42. Bewegungsgleichungen von Lagrange — generalisierte Koordinaten.

Nach dem Prinzip von d'Alembert gilt für ein System von Massenpunkten folgende Gleichung:

$$\Sigma\left[\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right] = 0$$

(§ 18). Wir führen nun anstatt der Koordinaten x, y, z beliebige andere Größen, die sogenannten generalisierten Koordinaten φ, ψ ... ein, welche mit den ursprünglichen Koordinaten durch Gleichungen verbunden sind. Es sei also

Digitized by Google

$$x = f\,(\varphi, \psi \ldots),$$
$$y = f_1\,(\varphi, \psi \ldots),$$

usw. Danach wird

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial x}{\partial \psi}\delta\psi + \ldots$$

Analoge Ausdrücke ergeben sich für δy und δz.

Wir können demnach folgende Gleichung bilden:

$$m\left(\frac{d^2 x}{d t^2}\delta x + \frac{d^2 y}{d t^2}\delta y + \frac{d^2 z}{d t^2}\delta z\right) = m\frac{d^2 x}{d t^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\delta\varphi\right.$$

$$\left. + \frac{\partial x}{\partial \psi}\delta\psi + \ldots\right) + m\frac{d^2 y}{d t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\delta\varphi + \frac{\partial y}{\partial \psi}\delta\psi + \ldots\right) + \ldots$$

$$= m\left(\frac{d^2 x}{d t^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{d^2 y}{d t^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{d^2 z}{d t^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\delta\varphi + \ldots$$

$$= m\frac{d}{d t}\left(\frac{d x}{d t}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{d y}{d t}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{d z}{d t}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)\delta\varphi - m\left(\frac{d x}{d t}\frac{\partial^2 x}{dt\,\partial\varphi}\right.$$

$$\left. + \frac{d y}{d t}\frac{\partial^2 y}{dt\,\partial\varphi} + \frac{d z}{d t}\frac{\partial^2 z}{dt\,\partial\varphi}\right)\delta\varphi + \ldots$$

Setzen wir

$$\frac{d x}{d t} = x', \quad \frac{d\varphi}{d t} = \varphi'$$

usw., so

$$x' = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\varphi' + \frac{\partial x}{\partial \psi}\psi' + \ldots,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}.$$

Es ist demnach

$$\frac{d x}{d t}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} = x'\frac{\partial x'}{\partial \varphi'} = \frac{\partial}{\partial \varphi'}\left(\frac{x'^2}{2}\right),$$

daher weiter

Digitized by Google

$$m \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{dz}{dt}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \varphi'}\left(\frac{m v^2}{2}\right),$$

da ja

$$x'^2+y'^2+z'^2=v^2$$

ist, wenn wir unter v die Geschwindigkeit des Punktes m verstehen.

Für die lebendige Kraft $\frac{m v^2}{2}$ wollen wir den Buchstaben L einführen. Man sieht leicht ein, daß

$$m\left(\frac{dx}{dt}\frac{\partial^2 x}{dt\,\partial \varphi}+\frac{dy}{dt}\frac{\partial^2 y}{dt\,\partial \varphi}+\frac{dz}{dt}\frac{\partial^2 z}{dt\,\partial \varphi}\right)=\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{m v^2}{2}\right)=\frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

ist. Mit Berücksichtigung alles dessen können wir unsere obige Gleichung demnach schreiben

$$m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2 y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2 z}{dt^2}\delta z\right)=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \varphi'}-\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right)\delta\varphi+\ldots$$

Ähnliche Gleichungen ergeben sich natürlich für die übrigen Massenpunkte.

Haben wir eine Funktion U von der Eigenschaft, daß $\frac{\partial U}{\partial \varphi}\delta\varphi+\frac{\partial U}{\partial \psi}\delta\psi+\ldots$ die bei einer kleinen Verschiebung geleistete Arbeit darstellt, so gilt die Gleichung

$$\Sigma m\left(\frac{d^2 x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2 y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2 z}{dt^2}\delta z\right)=\frac{\partial U}{\partial \varphi}\delta\varphi$$
$$+\frac{\partial U}{\partial \psi}\delta\psi+\ldots,$$

was ja nichts anderes als das Prinzip von d'Alembert ist. Beziehen wir die lebendige Kraft L auf sämtliche Massenpunkte, so erhalten wir nach der Überlegungsweise, die im § 17 benutzt wurde, schließlich die Gleichungen

Digitized by Google

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \varphi'} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi},$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \psi'} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \psi},$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

welche man die Bewegungsgleichungen von Lagrange nennt.

§ 43. Gleichungen für die relative Bewegung eines Körpers auf der Erdoberfläche.

Ein Punkt der Erdachse sei der Ursprung eines festen Koordinatensystems $O\,\Xi H Z$, die H-Achse gehe durch den Südpol. Es dreht sich also die Erde um diese Achse im positiven Sinn. Die Koordinaten eines Punktes M bezogen auf dieses feste Koordinatensystem seien ξ, η, ζ. Fest mit der Erde verbunden denken wir uns jetzt ein zweites Koordinatensystem $O\,x'\,y'\,z'$, welches mit dem ersten den Ursprung gemeinsam hat. Ferner fällt die y'-Achse mit der H-Achse zusammen, die x'-Achse wird hingegen zu einer bestimmten Zeit mit der Ξ-Achse einen bestimmten Winkel α einschließen, welchen auch die z'-Achse mit der Z-Achse bildet. α ändert sich beständig mit der Drehung der Erde. Es ist $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$ nichts anderes als die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung. Auf das neue Koordinatensystem bezogen wird also

$$\xi = x' \cos\alpha + z' \sin\alpha,$$
$$\eta = y',$$
$$\zeta = z' \cos\alpha - x' \sin\alpha.$$

Wir verschieben nun das bewegliche Koordinatensystem parallel zu sich selbst in der Richtung der

Digitized by Google

z'-Achse, bis der Ursprung auf die Erdoberfläche zu liegen kommt. Er hat dabei die Strecke p zurückgelegt, und wir wollen nun die neue Lage des Koordinatensystems mit $o\,x''\,y''\,z''$ bezeichnen. Die neuen Koordinaten x'', y'', z'' des Punktes M stehen also mit den früheren in folgender Beziehung:

$$x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z'' + p,$$
$$\xi = x'' \cos \alpha + (p + z'') \sin \alpha,$$
$$\eta = y'',$$
$$\zeta = (p + z'') \cos \alpha - x'' \sin \alpha.$$

Wir drehen jetzt das ganze Koordinatensystem um die x''-Achse, bis die z''-Achse vertikal steht. Der Winkel ψ, um welchen zu drehen ist, ist demnach nichts anderes als die nördliche Breite des Ursprungs unseres Koordinatensystems. Die jetzige Lage sei $o\,x\,y\,z$ mit den zugehörigen Koordinaten x, y, z, welche also folgenden Bedingungen unterliegen. Es ist

$$x'' = x, \quad y'' = y \cos \psi - z \sin \psi, \quad z'' = z \cos \psi + y \sin \psi,$$

folglich

$$\xi = x \cos \alpha + (p + z \cos \psi + y \sin \psi) \sin \alpha,$$
$$\eta = y \cos \psi - z \sin \psi,$$
$$\zeta = (p + z \cos \psi + y \sin \psi) \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Aus diesen Gleichungen wollen wir nun

$$v^2 = \left(\frac{d\,\xi}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,\eta}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,\zeta}{d\,t}\right)^2$$

bilden.

Die Winkelgeschwindigkeit unserer Erde ist so klein, daß wir das Quadrat derselben $\left(\frac{d\,\alpha}{d\,t}\right)^2 = \omega^2$ in unserer Formel ohne weiteres vernachlässigen können.

Digitized by Google

$t + \alpha$,

Höhe h

...h $\alpha = \beta$

h. Dann

vernach-

n Fall-

ertikal,

g nach

htet ist.

hwindig-

ie leicht

Digitized by Google

§ 44. Fall und Wurf mit Berücksichtigung der Erddrehung.

Auf unseren Massenpunkt wirke nur die Schwerkraft; dann ist $X = Y = 0$, $Z = -g$. Die im vorhergehenden Paragraph gefundenen Bewegungsgleichungen werden demnach

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d t^2} &= -2\omega\cos\psi\frac{dz}{dt} - 2\omega\sin\psi\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 y}{d t^2} &= 2\omega\sin\psi\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2 z}{d t^2} &= -g + 2\omega\cos\psi\frac{dx}{dt}. \end{aligned} \tag{24}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2\omega\cos\psi\cdot z - 2\omega\sin\psi\cdot y + a, \\ \frac{dy}{dt} &= 2\omega\sin\psi\cdot x + b, \\ \frac{dz}{dt} &= -gt + 2\omega\cos\psi\cdot x + c. \end{aligned}$$

Führen wir nun diese Ausdrücke in die obigen Gleichungen ein und vernachlässigen wir wieder alle Glieder mit ω^2, so

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d t^2} &= -2\omega\cos\psi(c - gt) - 2\omega\sin\psi\cdot b, \\ \frac{d^2 y}{d t^2} &= 2a\omega\sin\psi, \\ \frac{d^2 z}{d t^2} &= -g + 2a\omega\cos\psi. \end{aligned}$$

Durch Integration erhalten wir

$$\frac{dx}{dt} = -2\omega\cos\psi\left(ct - \frac{gt^2}{2}\right) - 2\omega\sin\psi\cdot bt + a_1,$$

Digitized by Google

$$\frac{dy}{dt} = 2a\omega \sin\psi \cdot t + b_1,$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + 2a\omega \cos\psi \cdot t + c_1,$$

was abermals integriert ergibt

$$x = -\omega \cos\psi\left(ct^2 - \frac{gt^3}{3}\right) - \omega \sin\psi \cdot bt^2 + a_1 t + \alpha,$$

$$y = a\omega \sin\psi \cdot t^2 + b_1 t + \beta,$$

$$z = -\frac{gt^2}{2} + a\omega \cos\psi \cdot t^2 + c_1 t + \gamma.$$

Es sei nun für $t = 0$ der Körper in der Höhe h in relativer Ruhe, also $x = y = 0$, $z = h$, folglich $\alpha = \beta = a_1 = b_1 = c_1 = b = c = 0, \gamma = h, a = 2\omega \cos\psi \cdot h$. Dann bleibt von unseren Gleichungen nur

$$x = \omega \cos\psi \cdot \frac{gt^3}{3},$$

$$y = 0,$$

$$z = h - \frac{gt^2}{2}$$

übrig, indem wir die Glieder mit ω^2 wieder vernachlässigen. Wir haben also die gewöhnlichen Fallgesetze, jedoch fällt der Körper nicht vertikal, sondern er erhält eine kleine Abweichung nach Osten, da ja die x-Achse nach Osten gerichtet ist.

Werfen wir den Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht nach oben, so gestalten sich, wie leicht zu finden, unsere Gleichungen folgendermaßen:

$$x = -\omega \cos\psi\left(ct^2 - \frac{gt^3}{3}\right),$$

$$y = 0,$$

$$z = ct - \frac{gt^2}{2}.$$

Digitized by Google

Nach der Zeit $t = \frac{2c}{g}$ kommt der Körper wieder auf die Erde. Dann ist $x = -\frac{1}{3}\omega c t^2 \cos\psi$, d. h. der Körper fällt westlich vom Aufstiegsort nieder.

§ 45. Horizontalbewegung mit Berücksichtigung der Erddrehung.

Wir wollen jetzt bloß die Bewegung in einer Horizontalebene betrachten. Wir setzen deshalb $\frac{dz}{dt} = 0$. Es bleibt uns dann von den Gleichungen (24) nur

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\sin\psi\cdot\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\sin\psi\cdot\frac{dx}{dt}. \qquad (25)$$

Bewegt sich der Punkt nach Osten, so ist $\frac{dx}{dt}$ positiv, er erhält eine Beschleunigung nach Süden, d. h. er weicht von der geraden Bahn nach rechts ab. Ist $\frac{dx}{dt}$ negativ, so erfolgt eine Ablenkung nach Norden, also wiederum nach rechts. Dasselbe geschieht bei der Bewegung nach Süden und Norden, wobei $\frac{dy}{dt}$ positiv bezüglich negativ ist. Es erlangt dadurch der Punkt eine Beschleunigung nach Westen, beziehungsweise nach Osten.

Wir haben also das Resultat, daß, wohin immer sich ein Körper auf der nördlichen Halbkugel bewegt, er infolge der Erddrehung eine Ablenkung nach

Digitized by Google

rechts erhält; auf der südlichen Halbkugel ist ψ negativ, daher die Ablenkung nach links.

Das hat einen gewissen Einfluß auf die Bewegung der Winde. Auch will man damit erklären, daß das eine Ufer der Flüsse mehr ausgewaschen wird als das andere.

Multiplizieren wir die Gleichungen (24) der Reihe nach mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ und addieren sie, so ergibt dies

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt} = -g\frac{dz}{dt},$$

d. h. wir erhalten dieselbe Bewegungsgleichung, als wäre gar keine Erdrotation vorhanden (§ 15). Es läßt sich also durch keinen Mechanismus, der auf der Erde selbst ruht, die lebendige Kraft der Erddrehung in Arbeit umsetzen.

§ 46. Foucaults Pendelversuch.

Aus den Gleichungen (25) wollen wir folgende bilden:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,\omega\sin\psi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right),$$

oder integriert

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (x^2 + y^2)\,\omega\sin\psi + C.$$

Wir haben hier wieder $\frac{dz}{dt} = 0$ angenommen. Desgleichen soll $C = 0$, d. h. eine absolute Flächengeschwindigkeit nicht vorhanden sein.

Setzen wir $x^2 + y^2 = \varrho^2$, so können wir die doppelte Flächengeschwindigkeit auch folgendermaßen darstellen:

$$\varrho^2\frac{d\varphi}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \varrho^2\,\omega\sin\psi,$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \sin \psi .$$

Das heißt: können wir eine Richtung unabhängig von der Erde fixieren, so scheint dieselbe sich mit einer Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = \omega \sin \psi$ um eine Vertikalachse zu drehen.

Eine solche fixierte Lage hat z. B. die Schwingungsebene eines Pendels. Dieselbe scheint sich also im Lauf der Zeit zu drehen, und es wies ja Foucault bekanntlich auf diese Weise die Erdrotation nach.

Wir wissen auch, daß ein rotierender Körper, dessen Rotationsachse eine freie Achse ist, seine Lage nicht ändert. Ist eine solche Achse frei beweglich horizontal aufgehängt, so wird auch sie infolge der Erddrehung eine scheinbare Drehung gleich der Schwingungsebene des Foucaultschen Pendels machen.

Hydromechanik.

§ 47. Hydrostatische Grundgleichungen.

In der Hydromechanik behandeln wir die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung der Flüssigkeiten und Gase.

Legen wir durch irgend eine ruhende Flüssigkeit eine Ebene, so wird auf sie von jeder Seite und zwar senkrecht zu ihr ein Druck, der sogenannte hydrostatische Druck ausgeübt. Dieser Druck p per Flächeneinheit ist von der Richtung der Ebene unabhängig, d. h. er ist nach allen Richtungen gleich groß.

Digitized by Google

Denken wir uns ein Elementarparallelepiped der Flüssigkeit, dessen Kanten α, β, γ parallel den Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems sind. Die Kräfte, welche parallel zur x-Achse wirken, sind der Druck p, welcher auf der linken Seite $\beta\gamma$ lastet, entgegengesetzt der Druck $-p'$ auf der rechten Seite und dann die x-Komponente der äußeren Kräfte. Diese sollen, wie etwa die Schwerkraft, proportional der Masse der Flüssigkeit sein, und ihre Komponenten auf die Masseneinheit seien X, Y, Z. Dann wirkt also auf unser Element parallel zur x-Achse die Kraft $\varrho\alpha\beta\gamma X$, wenn ϱ die Dichte der Flüssigkeit ist. Alle Kräfte sollen im Gleichgewicht, d. h. es muß

$$p\beta\gamma - p'\beta\gamma + \varrho\alpha\beta\gamma X = 0$$

sein. Wir nehmen nun an, der Druck p sei eine Funktion der Koordinaten, so

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x}\alpha .$$

Führen wir diesen Wert in unsere Gleichung ein, dividieren wir durch $\alpha\beta\gamma$ und überlegen wir, daß wir in ganz ähnlicher Weise auch bei den übrigen Komponenten vorgehen können, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Diese Gleichungen bedingen das Gleichgewicht einer Flüssigkeit, weshalb man sie die **hydrostatischen Grundgleichungen** nennt.

Digitized by Google

Haben die Kräfte ein Potential ψ, ist mithin $X = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$ usw.; so nehmen unsere Gleichungen die Form

$$\varrho \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

usf. an und lassen sich in

$$dp = -\varrho d\psi$$

zusammenziehen.

§ 48. Abhängigkeit des Drucks von der Schwere in tropfbaren Flüssigkeiten — hydrostatisches Paradoxon.

Lassen wir die z-Achse vertikal nach oben gehen und führen wir als äußere Kraft nur die Schwere ein, so ist

$$X = Y = 0, \quad Z = -g.$$

Unsere Gleichungen werden

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\varrho g.$$

Für tropfbare Flüssigkeiten können wir die Dichte als vom Druck unabhängig ansehen; die Integration der Gleichungen ergibt daher

$$p = \text{const.}$$

für alle Punkte einer Horizontalebene, welche man auch eine Niveaufläche nennt, und

$$p = c - \varrho g z$$

für die Abhängigkeit des Drucks von der Höhe.

Die Oberfläche der Flüssigkeit muß daher eine Horizontalebene sein. Legen wir sie in die xy-Ebene, so

$$p = -\varrho g z,$$

d. h. der Druck ist proportional der Tiefe. Die Form des Gefäßes spielt in den Gleichungen

Digitized by Google

gar keine Rolle, d. h. sie ist für den Druck der Flüssigkeit vollständig gleichgültig, eine Erscheinung, die man das hydrostatische Paradoxon nennt.

Dasselbe Resultat erhalten wir natürlich auch, wenn wir die Gleichung $dp = -\varrho\, d\psi$ integrieren. Da ϱ konstant, so

$$p = c - \varrho\psi, \tag{27}$$

während $\psi = gz$ ist.

§ 49. Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeit.

Dreht sich ein teilweise mit Flüssigkeit angefülltes zylindrisches Gefäß um seine Achse, so rotiert bald die ganze Flüssigkeit mit und bildet dabei eine einwärts gewölbte Oberfläche. Lassen wir ein Koordinatensystem, dessen z-Achse die Zylinderachse ist, in gleicher Geschwindigkeit mit dem Gefäß rotieren, so können wir die Flüssigkeit in bezug auf dieses System als ruhend ansehen und unsere Gleichungen darauf anwenden. Ist die Winkelgeschwindigkeit ω, so erlangt ein Teilchen infolge der Fliehkraft die Beschleunigungen

$$X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g.$$

Für diese Kräfte haben wir das Potential

$$\psi = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 + gz,$$

wenn wir $x^2 + y^2 = r^2$ einführen. Nach Gleichung (27) ist somit der Druck

$$p = c + \varrho\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz\right).$$

Die Flächen konstanten Drucks oder die Niveauflächen und damit auch die Oberfläche sind Rotationsparaboloide.

Digitized by Google

§ 50. Barometrische Höhenformel.

Wollen wir die hydrostatischen Grundgleichungen auf Gase anwenden, so haben wir zu bedenken, daß bei diesen die Beziehung zwischen Druck und Dichte durch das Boylesche Gesetz

$$\frac{p}{\varrho} = R$$

gegeben ist, wobei R eine Konstante bedeutet.

Lassen wir bloß die Schwerkraft mit dem Potential $\psi = g z$ wirken, so wird die Gleichung $d p = -\varrho d \psi$ sich verwandeln in

$$d p = -\varrho g d z = -\frac{p g}{R} d z,$$

oder

$$\frac{d p}{p} = -\frac{g}{R} d z.$$

Durch Integration erhalten wir

$$l p = -\frac{g}{R} z + l C,$$

$$p = C e^{-\frac{g}{R} z}.$$

Für $z = 0$ sei $p = p_0$. Dann wird

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{R} z}.$$

Nach dieser Gleichung nimmt der Luftdruck mit wachsender Höhe ab.

§ 51. Kapillaritätskonstanten.

Man nimmt an, daß die kleinsten Teilchen einer Flüssigkeit Anziehungskräfte, die sogenannten Kapillarkräfte, aufeinander ausüben, die allerdings nur auf sehr kleine Entfernungen wirksam sind. Das hat zur Folge,

Digitized by Google

daß ein Teilchen im Innern einer Flüssigkeit sich so verhält, als wären derartige Kräfte nicht vorhanden, weil sie nach allen Richtungen gleichmäßig wirken, sich daher gegenseitig aufheben. Die Teilchen an der Oberfläche erfahren jedoch einen Zug gegen das Innere der Flüssigkeit. Es ist daher eine Arbeit zu leisten, um ein Flüssigkeitsteilchen aus dem Innern an die Oberfläche zu bringen. Die Vergrößerung der Oberfläche erfordert Arbeit.

Befindet sich eine Flüssigkeit in einem Gefäß, so ist sie im allgemeinen teils von der freien Oberfläche, teils von den Gefäßwänden begrenzt. Diese dem Gefäß und der Flüssigkeit gemeinsame Fläche nennen wir die gemeinsame Oberfläche. Wollen wir die freie Oberfläche um die Flächeneinheit vergrößern, so haben wir die Arbeit α zu leisten, ebenso bei der Vergrößerung der gemeinsamen Oberfläche um die Flächeneinheit die Arbeit β. α und β nennt man die Kapillaritätskonstanten der Flüssigkeit.

§ 52. **Erste Hauptgleichung der Kapillarität.**

Um die Gleichgewichtsfigur der freien Oberfläche einer Flüssigkeit zu finden, benutzen wir wieder das Prinzip von d'Alembert. Als äußere Kraft sei nur die Schwere vorhanden. Dieselbe leistet bei einer virtuellen Verschiebung die Arbeit

$$\iiint -\varrho g \delta z \cdot dx\, dy\, dz,$$

wenn δz die Komponente der Verschiebung parallel zur z-Achse ist.

Auf der Oberfläche der Flüssigkeit laste der Druck P. Einer Verschiebung δn in der Richtung der Normalen entspricht demnach die Arbeitsleistung der Kräfte

$$-\iint P \delta n\, dO.$$

Digitized by Google

Diese Arbeit ist gleich Null, wenn, wie wir annehmen wollen, sowohl der Druck P als auch das Volumen der Flüssigkeit konstante Größen sind. Es ist dann

$$\iint P\,\delta n\,dO = P\iint \delta n\,dO = 0\,,$$

da ja

$$\iint \delta n\,dO = 0$$

nichts anderes als die Volumsänderung ist.

Bei der Vergrößerung der freien Oberfläche leisten die Kräfte die Arbeit

$$-\alpha\,\delta F\,.$$

Die gemeinsame Oberfläche ändere sich nicht.

Die Bedingung, daß das Gesamtvolumen der Flüssigkeit konstant bleiben soll, läßt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\iiint \delta(dx\,dy\,dz) = \iiint\left(\frac{d\,\delta x}{dx} + \frac{d\,\delta y}{dy} + \frac{d\,\delta z}{dz}\right)dx\,dy\,dz = 0\,. \tag{28}$$

Wir können nämlich leicht die Transformation vornehmen:

$$\begin{aligned}\delta(dx\,dy\,dz) &= dy\,dz\,d\delta x + dx\,dz\,d\delta y + dx\,dy\,d\delta z\\ &= dx\,dy\,dz\left(\frac{d\,\delta x}{dx} + \frac{d\,\delta y}{dy} + \frac{d\,\delta z}{dz}\right).\end{aligned}$$

Alle angeführten Bedingungen lassen sich in eine Gleichung zusammenfassen, wenn wir Gleichung (28) mit einem willkürlichen Faktor λ multiplizieren und sie zur Summe aller Arbeiten addieren. Das ergibt, wie leicht zu finden,

$$\iiint\left[-\varrho g\,\delta z + \lambda\left(\frac{d\,\delta x}{dx} + \frac{d\,\delta y}{dy} + \frac{d\,\delta z}{dz}\right)\right]dx\,dy\,dz$$
$$-\alpha\,\delta F = 0\,.$$

Digitized by Google

Es ist nun

$$\iiint \lambda \frac{d\delta x}{dx} dx\,dy\,dz = \iint dy\,dz \cdot \lambda \delta x - \iiint \delta x \frac{\partial \lambda}{\partial x} dx\,dy\,dz.$$

Sind ξ, η, ζ die Winkel, welche die Normale eines Oberflächenelements dO mit den Koordinatenachsen einschließt, so können wir

$$dy\,dz = dO \cos \xi$$

usw. setzen, und es wird

$$\iint dy\,dz\,\lambda \delta x + \iint dz\,dx \cdot \lambda \delta y + \iint dx\,dy \cdot \lambda \delta z = \iint \lambda\, dO\, \delta n,$$

da ja

$$\delta x \cos \xi + \delta y \cos \eta + \delta z \cos \zeta = \delta n$$

ist.

Obige Gleichung läßt sich daher umwandeln in

$$\iiint \left[-\frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta x - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta y - \left(\varrho g + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \right) \delta z \right] dx\,dy\,dz$$
$$+ \iint \lambda\, dF\, \delta n - \alpha\, \delta F = 0.$$

Wir haben hier für dO das Differential dF eingeführt, da ja nur die freie Oberfläche ein von Null verschiedenes δn haben kann.

Das Volumen unserer Flüssigkeit kann natürlich ganz willkürlich gewählt werden, weshalb in unseren Gleichungen das dreifache Integral für sich gleich Null werden muß. Dies ist erfüllt, wenn wir

$$\lambda = c_1 - \varrho g z \tag{29}$$

setzen, wobei c_1 eine beliebige Konstante ist. Es bleibt demnach nur noch

$$\iint \lambda\, \delta n\, dF - \alpha\, \delta F = 0. \tag{30}$$

Für ein Oberflächenelement dO können wir nach einem Lehrsatz der Geometrie zwei senkrecht aufeinander stehende Ebenen angeben, deren eine die Kurve des größten, die andere jene

Digitized by Google

des kleinsten Krümmungsradius des Flächenelements enthält. Diese Radien seien r und r'. Wir lassen sie von den entsprechenden Krümmungsmittelpunkten aus die Winkel $d\varphi$ bez. $d\psi$ beschreiben und erhalten so das Oberflächenelement

$$dO = r r' d\varphi d\psi.$$

Verschieben wir das Element nach der Normalen um δn, so erhalten wir das neue Element

$$dO' = (r + \delta n)(r' + \delta n) d\varphi d\psi = r r' d\varphi d\psi \left(1 + \frac{\delta n}{r} + \frac{\delta n}{r'}\right).$$

Der Zuwachs des Oberflächenelements ist mithin

$$dO' - dO = dO\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\delta n.$$

Auf die freie Oberfläche angewandt können wir daher

$$\delta F = \iint dF\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\delta n$$

setzen. Danach wird also Gleichung (30)

$$\iint\left[\lambda - \alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\right] dF\,\delta n = 0.$$

Nun ist aber

$$\iint dF\,\delta n = 0,$$

weil dies die Volumsänderung der Flüssigkeit darstellt. Es genügt daher,

$$\lambda - \alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) = c_2$$

oder mit Zuhilfenahme von (29)

$$\varrho g z + \alpha\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) = c \tag{31}$$

zu setzen, wobei die Konstante c aus bekannten Werten von r, r' und z gefunden werden muß.

Gleichung (31) nennt man die erste Hauptgleichung der Kapillarität.

Digitized by Google

§ 53. Zweite Hauptgleichung der Kapillarität.

Wir berücksichtigten bisher nicht die Möglichkeit, daß auch die gemeinsame Oberfläche bei der virtuellen Verschiebung eine Größenänderung erfährt. A B (Fig. 15) sei die Gefäßwand, C D die freie Oberfläche. Beide bilden mitsammen den sogenannten Randwinkel i. Machen wir eine virtuelle Verschiebung δn in der Richtung der Normalen, so erfährt dadurch sowohl die gemeinsame als die freie Oberfläche einen Zuwachs. Nennen wir die Peripherie des Gefäßes p, so ist der Zuwachs der freien Oberfläche längs des Umfangsdifferentials d p durch $\overline{C'C''}\,dp$, jener der gemeinsamen durch $\overline{CC'}\,dp$ gegeben. Die bei der virtuellen Verschiebung längs des ganzen Umfangs geleistete Arbeit muß für den Fall des Gleichgewichts wiederum gleich Null sein, wonach wir die Gleichung erhalten

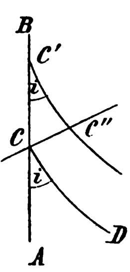


Fig. 15.

$$-\alpha\int\overline{C'C''}\,dp-\beta\int\overline{CC'}\,dp=0\,.$$

Nun ist $$\overline{C'C''}=\overline{CC'}\cos i\,,$$

daher $$\int\overline{CC'}(\alpha\cos i+\beta)\,dp=0\,,$$

was erfüllt ist, wenn wir

$$\alpha\cos i+\beta=0$$

setzen. Das ist die zweite Hauptgleichung der Kapillarität.

§ 54. Steighöhe in Röhren und zwischen Platten.

Wir können die erste Hauptgleichung in der Form

$$\varrho g z=-\alpha\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)+c$$

Digitized by Google

schreiben. Dabei ist der Krümmungsradius r positiv, wenn er innerhalb der Flüssigkeit liegt, wenn wir also eine konvexe Oberfläche haben. Dies ist bei Quecksilber in einer Glasröhre der Fall. Ist die Röhre eng genug, so können wir die Oberfläche des Quecksilbers, den Meniskus, als Halbkugel ansehen, deren Radius mit jenem der Röhre übereinstimmt. Wählen wir die Quecksilberoberfläche in einem weiten Gefäß als xy-Ebene, so ist für dieselbe $z = 0$, $r = r' = \infty$, also $c = 0$, und wir erhalten

$$\varrho g z = -\alpha \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Für eine enge Röhre vom Radius r, die wir in das Quecksilber eintauchen, wird diese Gleichung

$$\varrho g z = -\frac{2\alpha}{r}.$$

Haben wir zwei parallele ebene Platten vom Abstand 2r, so bildet die Quecksilberoberfläche eine Zylinderfläche, deren einer Krümmungsradius gleich r, während der andere gleich ∞ ist. Für diese Anordnung erhalten wir demnach

$$\varrho g z = -\frac{\alpha}{r}.$$

Zwischen zwei Platten, deren Abstand gleich dem Durchmesser einer Röhre ist, steht also die Quecksilberoberfläche halb so tief unter dem normalen Niveau als in der Röhre.

Ist die Oberfläche nicht konvex, sondern konkav, so liegen die Krümmungsradien außerhalb der Flüssigkeit. Wir müssen sie dann als negativ ansehen, d. h. eine benetzende Flüssigkeit steigt in einer engen Röhre, und zwar ist die Steighöhe verkehrt

Digitized by Google

proportional dem Krümmungsradius und im obigen Sinn doppelt so groß als zwischen zwei Platten. Dies alles gilt jedoch nur dann, wenn wir den Durchmesser der Röhre gegenüber der Steighöhe vernachlässigen können. Eine genauere Formel werden wir im § 56 kennen lernen.

§ 55. Blasen und Tropfen.

Wir betrachten die Gestalt der Oberfläche längs einer geraden Wand. Wir erhalten eine Zylinderfläche, der eine Krümmungsradius ist daher $r' = \infty$. Für die Leitlinie OC der Zylinderfläche (Fig. 16) gilt

$$r\,d\varphi = ds \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Fig. 16.

Da aber nach unserer ersten Hauptgleichung $\varrho g z = \frac{\alpha}{r}$, so auch

$$\varrho g z = \alpha \frac{d\varphi}{ds} = \alpha \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \alpha \cos\varphi \frac{d\varphi}{dx}.$$

Wir haben ferner $\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$, also

$$\varrho g z \frac{dz}{dx} = \alpha \cos\varphi \operatorname{tg}\varphi \frac{d\varphi}{dx} = \alpha \sin\varphi \frac{d\varphi}{dx}.$$

Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir

$$\frac{\varrho g z^2}{2} = -\alpha \cos\varphi + C.$$

Für $z = 0$ wird auch $\varphi = 0$, daher $C = \alpha$ und

$$\frac{\varrho g z^2}{2} = \alpha (1 - \cos\varphi).$$

Digitized by Google

Für den Punkt an der Gefäßwand erkennt man ohne weiteres, daß der Winkel φ das Komplement des Randwinkels i ist. Die Erhebung z_1 der Flüssigkeit am Rand über das normale Niveau ist also durch

$$\frac{\varrho g z_1^2}{2} = \alpha (1 - \sin i)$$

gegeben. Infolge der quadratischen Form der Gleichung erkennt man jedoch nicht, ob die Erhebung positiv oder negativ ist, aber wir wissen, daß eine Erhebung nur bei benetzenden Flüssigkeiten vorhanden ist.

Eine nichtbenetzende Flüssigkeit auf eine ebene Unterlage gebracht bildet einen Tropfen. Ist er so groß, daß wir seine Höhe gegenüber seinem Durchmesser vernachlässigen können, so läßt sich auf ihn unsere Gleichung anwenden. Im Punkt C (Fig. 17) stehe die Tangente an die Durchschnittskurve des Tropfens senkrecht. Der Winkel φ ist 90^0, $\cos\varphi = 0$. Der Punkt C liegt daher um h tiefer als der höchste Punkt des Tropfens. Wir erhalten für ihn die Formel

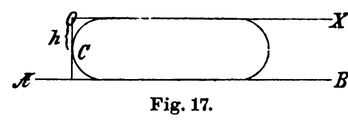


Fig. 17.

$$h^2 = \frac{2\alpha}{\varrho g},$$

nach welcher wir die Kapillaritätskonstante berechnen können. Die Fig. 17 können wir umkehren und haben dann den Fall einer Luftblase unter einer Glasplatte, welche die Flüssigkeit oben abschließt. Solche Blasen ergeben also ebenfalls ein Mittel zur Berechnung der Konstanten α.

§ 56. **Kapillarröhren.**

Tauchen wir einen beliebig begrenzten Zylinder vom Umfang L mit seiner Achse senkrecht in eine Flüssig-


Digitized by Google

keit und machen wir jetzt, indem wir entweder die Flüssigkeit oder den Zylinder heben oder senken, eine virtuelle Verschiebung, so muß für den Fall des Gleichgewichts die Summe sämtlicher Arbeiten gleich Null sein.

Bei einer Kapillarröhre vom Radius r können wir folgendermaßen verfahren. Wir heben die Flüssigkeit in derselben um δ h. Dabei erhalten wir eine Vergrößerung der gemeinsamen Oberfläche $2\pi r \delta h$. Die Arbeit ist $-2\pi\beta r\delta h$. Die Arbeit, um die Flüssigkeitssäule vom Gewicht G zu heben, ist $G\delta h$, und für den Fall des Gleichgewichts muß

$$-2\pi\beta r\delta h - G\delta h = 0$$

sein, was wir auch so schreiben können:

$$G = -2\pi\beta r.$$

Haben wir keinen Kreiszylinder, so brauchen wir bloß $2\pi r$ durch den Umfang L zu ersetzen und erhalten die allgemeinere Formel

$$G = -\beta L = \alpha \cos i \cdot L,$$

welch letztere Beziehung unmittelbar aus der zweiten Hauptgleichung folgt.

Benetzt eine Flüssigkeit die Gefäßwand vollkommen, so können wir $i = 0$, $\cos i = 1$ setzen. Dann wird für einen Kreiszylinder

$$G = 2\pi r\alpha.$$

Für ein genügend enges Rohr läßt sich der Meniskus als Halbkugel auffassen. Nennen wir die Höhe des tiefsten Punkts des Meniskus über dem normalen Niveau h, so ist das gehobene Gewicht

$$\varrho g(\pi r^2 h + \pi r^2 \cdot r - \tfrac{2}{3}\pi r^3) = \varrho g(\pi r^2 h + \tfrac{1}{3}\pi r^3) = 2\pi r\alpha,$$

oder

$$h + \tfrac{1}{3} r = \frac{2\alpha}{\varrho g r}.$$

Digitized by Google

Es ist dies eine genauere Formel für die Steighöhe von Flüssigkeiten in Kapillarröhren.

Nach ganz demselben Vorgang läßt sich das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit berechnen, wenn man eine kreisrunde Platte aus ihr herauszieht, was eine Methode ergibt, mit Hilfe der Wage die Kapillaritätskonstante zu bestimmen, indem man das Gewicht sucht, welches zum Abreißen einer Platte von der Flüssigkeitsoberfläche erforderlich ist.

Ebenso können wir einen Einfluß der Kapillarkräfte auf den Stand des Aräometers nachweisen, da das Gewicht desselben scheinbar um das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit vermehrt wird.

§ 57. Hydrodynamische Grundgleichungen.

Ein Elementarparallelepiped von den Kanten α, β, γ parallel zu den 3 Achsen eines Koordinatensystems hat die Masse $\varrho\alpha\beta\gamma$. Die Kraft, welche parallel der x-Achse auf dasselbe wirkt, kann also gemessen werden durch

$$\varrho\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\frac{d^2 x}{d t^2} = \varrho\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\frac{d u}{d t},$$

wenn wir mit u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit bezeichnen. Die Kräfte auf die Masseneinheit seien wieder dieselben wie in § 47, also $X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$. Wir erhalten demnach

$$\frac{d u}{d t} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Es ist nun

$$\frac{d u}{d t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{d x}{d t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{d y}{d t} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{d z}{d t}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} + w\,\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Digitized by Google

Durch Einführung dieses Werts in unsere Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (32) \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},
\end{aligned}$$

wobei die zwei letzten Gleichungen analog der ersten gebildet sind. Zu diesen Gleichungen kommt noch die sogenannte Kontinuitätsgleichung. Sämtliche Gleichungen nennt man die Eulerschen Grundgleichungen der Hydrodynamik.

Die Kontinuitätsgleichung gibt uns die Massenänderung oder, wenn man will, die Dichtenänderung an einem bestimmten Ort an. Dieselbe ist für die Zeit dt in unserem Elementarparallelepiped gleich $\alpha\beta\gamma\frac{\partial\varrho}{\partial t}dt$, und sie muß gleich sein der in das Volumelement während der Zeit dt einströmenden Flüssigkeit vermindert um die während derselben Zeit ausströmende. Von links strömt durch die Fläche $\beta\gamma$ die Menge $\beta\gamma\varrho u\,dt$ ein, rechts $\beta\gamma\varrho' u' dt$ aus. Ähnlich verhält es sich mit der oberen und unteren, vorderen und hinteren Fläche des Parallelepipeds.

Nun ist

$$\varrho' u' = \varrho u + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}\alpha,$$

daher

$$\beta\gamma\varrho u\,dt - \beta\gamma\varrho' u' dt = -\alpha\beta\gamma\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x}dt.$$

Der Gesamtmassenzuwachs ist daher

Digitized by Google

$$\alpha \beta \gamma \frac{\partial \varrho}{\partial t} d t = -\alpha \beta \gamma d t \left[\frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho w)}{\partial z} \right],$$

woraus wir die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\varrho w)}{\partial z} = 0$$

erhalten.

§ 58. Ausflußgeschwindigkeit einer tropfbaren Flüssigkeit.

Wir machen in den Boden eines Gefäßes ein Loch, aus welchem senkrecht nach unten die Flüssigkeit strömen soll. In die Richtung des Strahls legen wir die z-Achse. Es ist dann $X = Y = u = v = 0$, $Z = g$. Die Gleichungen (32) reduzieren sich demnach auf

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Ist die Größe des Lochs im Vergleich zum Querschnitt des Gefäßes zu vernachlässigen, so können wir für eine bestimmte Zeit das Flüssigkeitsniveau als konstant, also auch den ganzen Strömungsvorgang als stationär ansehen. Dann wird $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, und es bleibt uns nur

$$w \frac{d w}{d z} + \frac{1}{\varrho} \frac{d p}{d z} = g,$$

was integriert ergibt

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\varrho} = g z + C.$$

Digitized by Google

An einem Punkt im Innern des Gefäßes von der Ordinate $z = -z_1$ sei $w = 0$; $p = (h - z_1)\varrho g$, das ist der hydrostatische Druck, wobei h die Höhe der Flüssigkeit im Gefäß bedeutet. Dann ist

$$(h - z_1) g = - g z_1 + C,$$

also $C = hg$. Unmittelbar unter der Öffnung ist der Druck auf die Flüssigkeit gleich Null. Für diesen Punkt setzen wir $z = 0$. Wir erhalten daher

$$\frac{w^2}{2} = hg \quad \text{oder} \quad w = \sqrt{2gh},$$

das bekannte Ausflußgesetz von Torricelli.

Es läßt sich natürlich dieses Gesetz auch ohne weiteres aus dem Prinzip von der Erhaltung der Energie ableiten. Es muß ja die lebendige Kraft der Teilchen beim Ausfluß gleich der Arbeit sein, welche die Schwere beim Wandern der Teilchen von der Flüssigkeitsoberfläche bis zum Ausfluß leistet. Dies ergibt dann für die Ausflußgeschwindigkeit einfach die Geschwindigkeit, wie sie die Fallgesetze verlangen.

§ 59. Ausflußgeschwindigkeit der Gase.

Wir nehmen an, ein Gefäß enthalte komprimierte Luft, welche durch ein feines Loch in dünner Wand ausströmt. Die Ausströmungsrichtung sei die x-Achse, äußere Kräfte seien nicht vorhanden. Dann haben wir nach (32), vorausgesetzt, daß wir die Strömung wiederum als stationär ansehen können,

$$u \frac{du}{dx} = - \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dz} = 0.$$

Digitized by Google

Nach Boyle ist

$$\frac{p}{\varrho} = R,$$

also

$$u \frac{du}{dx} = -\frac{R}{p} \frac{dp}{dx},$$

oder integriert

$$l\,p = -\frac{u^2}{2R} + l\,C.$$

Im Innern des Gefäßes sei $p = p_1$ und $u = 0$, außerhalb $p = p_0$. Dann wird $C = p_1$, also

$$l \frac{p_1}{p} = \frac{u^2}{2R},$$

wonach wir für die Ausströmungsgeschwindigkeit u_0 die Gleichung

$$l \frac{p_1}{p_0} = \frac{u_0^2}{2R}$$

erhalten. Wir lassen nun zwei verschiedene Gase unter ganz denselben Bedingungen ausströmen. Die Ausströmungsgeschwindigkeiten seien u_0 und u_0'. Die zugehörigen R sind demnach $\frac{p}{\varrho}$ und $\frac{p}{\varrho'}$, woraus die Gleichungen folgen

$$\frac{u_0^2}{2R} = \frac{u_0'^2}{2R'},$$

$$\frac{u_0^2}{u_0'^2} = \frac{R}{R'} = \frac{\varrho'}{\varrho},$$

oder schließlich

$$\frac{u_0}{u_0'} = \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho}}.$$

Es verhalten sich die Quadrate der Ausflußgeschwindigkeiten wie umgekehrt die Dichten,

Digitized by Google

ein Gesetz von Graham, nach welchem Bunsen seine bekannte Methode, die Dichte der Gase zu bestimmen, begründete.

§ 60. Transformation der Eulerschen hydrodynamischen Grundgleichungen.

Die Flüssigkeitsmenge, welche in einem Elementarparallelepiped enthalten ist, wird infolge der verschiedenen Strömungsgeschwindigkeiten in den einzelnen Punkten der Flüssigkeit mit der Zeit ihre Gestalt nicht beibehalten können, was zur Folge hat, daß neben der fortschreitenden auch noch eine drehende Bewegung der Flüssigkeit in Betracht zu ziehen ist. Es sei z. B. ABCD (Fig. 18) die der xz-Ebene parallele Fläche des Flüssigkeitselements mit den Seiten dx und dz. Die Geschwindigkeit u parallel zur x-Achse sei in B größer als in A, die Geschwindigkeit w parallel zur z-Achse größer in D als in A. Nach der Zeit dt hat daher unser Rechteck die Gestalt AB′C′D′ angenommen. Es hat sich die Seite $AB = dz$ um den Winkel α, die Seite $AD = dx$ um $-\beta$ gedreht. Wir können daher als mittlere Drehung des gesamten Rechtecks um die y-Achse $\frac{\alpha - \beta}{2}$ setzen.

Fig. 18.

Nun ist
$$\alpha \partial z = (u' - u) dt,$$
wenn wir unter u die Geschwindigkeit der Flüssigkeit parallel zur x-Achse in A, unter u′ dieselbe Größe in

Digitized by Google

B verstehen. Es ist also

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial z} d t$$

und analog

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial x} d t .$$

Die mittlere Drehung um die y-Achse in der Zeit d t ist demnach

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) d t .$$

Durch zyklische Vertauschung der Buchstaben finden wir dann für den mittleren Drehungswinkel um die x-Achse $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) d t$, um die z-Achse $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) d t$. Dividieren wir die Drehungswinkel durch die Zeit d t, so erhalten wir die Winkelgeschwindigkeiten des Flüssigkeitselements um die drei Achsen

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad (33)$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Werden diese drei Größen Null, so findet in der Flüssigkeit keine Rotation der Teilchen um sich selbst statt. Für diesen Fall muß demnach

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (34)$$

sein. Können wir eine Funktion φ angeben von der Eigenschaft, daß

Digitized by Google

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ist, so sind damit die Gleichungen (34) erfüllt. Die Funktion φ steht hier in demselben Verhältnis zu den Geschwindigkeiten u, v, w, wie das Potential einer Kraft zu deren Komponenten. Man nennt daher nach v. Helmholtz φ auch das Geschwindigkeitspotential.

In der ersten der hydrodynamischen Grundgleichungen (32)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

können wir nach den Gleichungen (33)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} - 2\zeta$$

und

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2\eta$$

setzen und erhalten dann

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} + 2(w\eta - v\zeta) = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Zwei ähnliche Gleichungen erscheinen bezüglich der beiden anderen Achsen. Beachten wir noch, daß

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2 + w^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial x}$$

ist, wenn wir $u^2 + v^2 + w^2 = c^2$ einführen, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\eta - v\zeta) &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\zeta - w\xi) &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial y}, \qquad (35) \\
\frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\xi - u\eta) &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial c^2}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Wir differenzieren nun die zweite dieser Gleichungen nach z, die dritte nach y, beachten, daß nach den Gleichungen (33)

$$2\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

und erhalten so durch Subtraktion der zweiten von der dritten der Gleichungen (35) bei konstantem ϱ

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(v\xi - u\eta) - \frac{\partial}{\partial z}(u\zeta - w\xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit — nur mit solchen befassen wir uns hier — ist die Kontinuitätsgleichung (§ 57)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Gleichungen (33) ergeben

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Damit können wir unsere Gleichung verwandeln in

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} - \xi\frac{\partial u}{\partial x} - \eta\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right).$$

Fassen wir ein ganz bestimmtes Flüssigkeitsteilchen ins Auge, so sind seine Winkelgeschwindigkeiten Funktionen der Zeit t und der Koordinaten x, y, z. Ist daher zu einer bestimmten Zeit t

$$\xi = f(t, x, y, z),$$

so haben wir nach Verlauf der Zeit dt

$$\xi = f(t + dt,\ x + u\,dt,\ y + v\,dt,\ z + w\,dt).$$

Digitized by Google

Daraus folgt

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z},$$

und wir erhalten schließlich

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$

und ähnliche Ausdrücke für $\frac{d\eta}{dt}$ und $\frac{d\zeta}{dt}$.

Haben die Kräfte ein Potential ψ, so daß

$$Z = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad Y = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

ist ferner zu irgend einer Zeit

$$\xi = \eta = \zeta = 0,$$

d. h. ist keine Rotation der Flüssigkeitsteilchen vorhanden, so tritt in einer idealen Flüssigkeit — das ist eine ohne innere Reibung — nie eine drehende Bewegung der Teilchen ein. Hingegen werden jene Teilchen, welche rotieren, nie ihre Rotationsbewegung verlieren.

§ 61. **Wirbelbewegung.**

Wir denken uns eine Flüssigkeit, welche so um die z-Achse rotiert, daß alle Teilchen einer konzentrischen Zylinderfläche denselben Bewegungszustand haben. Ist in der Entfernung r von der z-Achse die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit ω, so ist

$$u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\omega - y\frac{d\omega}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = -\omega - \frac{y^2}{r}\cdot\frac{d\omega}{dr},$$

Digitized by Google

da wegen $x^2 + y^2 = r^2$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ ist. Desgleichen wird

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \omega + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{d\omega}{dr},$$

folglich wird

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega + \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr}.$$

Es soll nun für $r < r_0$ $\zeta = \zeta_0$ und für $r < r_0$ $\zeta = 0$ sein, wobei ζ_0 und r_0 Konstanten bedeuten. Innerhalb des Zylinders vom Radius r_0 haben wir demnach

$$\zeta_0 = \omega + \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr},$$

was wir umformen können in

$$\frac{2\,dr}{r} + \frac{d\omega}{\omega - \zeta_0} = 0.$$

Durch Integration erhalten wir

$$l\,r^2 + l\,(\omega - \zeta_0) = l\,A$$

oder

$$r^2(\omega - \zeta_0) = A,$$

$$\omega = \zeta_0 + \frac{A}{r^2}.$$

Da in der z-Achse selbst die Rotationsgeschwindigkeit nicht unendlich werden soll, so haben wir $A = 0$ zu setzen. Wir erhalten also

$$\omega = \zeta_0.$$

Das heißt: der Flüssigkeitszylinder vom Radius r_0 rotiert wie ein fester Körper um die z-Achse.

Setzen wir hingegen $\zeta = 0$, so haben wir die Gleichung

Digitized by Google

$$\omega + \frac{1}{2} r \frac{d\omega}{dr} = 0$$

zu lösen. Dies ergibt

$$\omega = \frac{C}{r^2}.$$

Da wir eine Unstetigkeit ausschließen, so müssen für $r = r_0$ die beiden ω einander gleich werden, d. h. es muß

$$\zeta_0 = \frac{C}{r_0^2}$$

sein. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Flüssigkeit um die z-Achse bewegt, ist sonach

$$r\omega = \frac{C}{r} = \frac{\zeta_0 r_0^2}{r}.$$

Wir haben also wohl zu unterscheiden zwischen der Gesamtbewegung der Flüssigkeit und der rotierenden Bewegung der einzelnen Teilchen um sich selbst. Während wir nämlich für unseren Flüssigkeitswirbel, sobald $r > r_0$ ist, zwar eine rotierende Bewegung der gesamten Flüssigkeit haben, macht jedes Teilchen um sich selbst keine Drehung.

§ 62. **Stationäre Bewegung einer idealen Flüssigkeit.**

Ist die Geschwindigkeit und deren Richtung in jedem Punkt einer Flüssigkeit von der Zeit unabhängig, so nennen wir dies einen stationären Zustand. Für diesen wird also

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

werden. Wir führen nun das Geschwindigkeitspotential und für die Kräfte das Potential V ein, multiplizieren die Gleichungen (32) der Reihe nach mit dx, dy, dz, addieren und integrieren sie und erhalten so

Digitized by Google

$$\frac{c^2}{2} + V + \frac{p}{\varrho} = C,$$

wobei $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$ bedeutet. Wirkt nur die Schwere, so ist

$$V = g z,$$

daher der Druck

$$p = \varrho \left(C - g z - \frac{c^2}{2} \right).$$

Diese Gleichung wollen wir benützen, um den Druck zu berechnen, welchen eine Flüssigkeit, die parallel zur x-Achse mit der Geschwindigkeit u_0 fließt, ausübt, wenn wir in dieselbe einen kreiszylindrischen Stab vom Radius R stecken. Die Stabachse bilde die z-Achse eines Koordinatensystems. Es wird natürlich dadurch in der Umgebung des Stabs die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung der Flüssigkeit geändert. Denken wir uns den Stab jedoch unendlich lang, so wird sich diese Änderung nur auf u und v, nicht aber auf w beziehen. Es bleibt also $w = 0$, und wir brauchen bloß den Vorgang in der xy-Ebene der Betrachtung zu unterziehen.

Wir setzen $x^2 + y^2 = r^2$. Nach der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

muß also für das Geschwindigkeitspotential φ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

existieren, welche sich in unserm Fall auf

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{36}$$

reduziert, da ja $w = 0$ ist.


Digitized by Google



Diese Bedingungsgleichung wird erfüllt durch

$$\varphi = \Phi - u_0 x ,$$

wenn für $r = \infty$ $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$ wird, und die Beziehung besteht

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 .$$

Wir haben dann in der Tat im obigen Sinn nur eine Strömung parallel zur x-Achse mit der Geschwindigkeit u_0. Es wird sich im späteren zeigen, daß die Funktion

$$\Phi = \frac{A x}{r^2} ,$$

mithin

$$\varphi = \frac{A x}{r^2} - u_0 x$$

allen gestellten Anforderungen genügt. Vorerst sieht man durch Differentiation ohne weiteres, daß Gleichung (36) erfüllt ist.

Senkrecht zur Oberfläche des Zylinders kann natürlich keine Geschwindigkeitskomponente vorhanden sein, d. h. es muß

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_R = 0$$

sein. Wir wollen $\frac{x}{r} = \cos \gamma$ setzen und erhalten so

$$\varphi = \frac{A}{r} \cos \gamma - r\, u_0 \cos \gamma ,$$

mithin

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_R = - \frac{A}{R^2} \cos \gamma - u_0 \cos \gamma = 0 .$$

Daraus folgt

$$A = - u_0 R^2$$

Digitized by Google

und

$$\varphi = -u_0 x\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right),$$

daher

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{2 u_0 x^2 R^2}{r^4},$$

$$v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{2 u_0 R^2 x y}{r^4}.$$

Für die Oberfläche des Zylinders erhalten wir nun

$$c_R^2 = u_R^2 + v_R^2 = \frac{4 u_0^2 y^2}{R^2}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung für den Druck ein, so ergibt dies schließlich

$$p = \varrho\left(C - g z - \frac{c_R^2}{2}\right) = \varrho\left(C - g z - \frac{2 u_0^2 y^2}{R^2}\right).$$

Es wird demnach auf die linke Seite des Zylinders genau derselbe Druck wie auf die rechte ausgeübt. Dasselbe ist der Fall, wenn sich in ruhender Flüssigkeit der Zylinder parallel zu sich selbst fortbewegt. Er erfährt dann gar keinen Widerstand. Man kann übrigens für jeden beliebigen Körper diese auffallende Erscheinung nachweisen. Allerdings muß die Flüssigkeit eine ideale sein.

§ 63. **Wasserwellen.**

Wir denken uns Wasserwellen, welche in der Richtung der x-Achse fortschreiten. Die Wasserteilchen machen also nur Bewegungen parallel zur x- und z-Achse. Es verwandelt sich daher die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Digitized by Google

wegen $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ in

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

oder, wenn wir das Geschwindigkeitspotential einführen,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 .$$

Wir untersuchen nun, ob die Wellenbewegung eine harmonische sein kann. Wir setzen demnach

$$\varphi = \mathfrak{Z} \cos a (x - c t) ,$$

wobei $\mathfrak{Z}$ eine Funktion von z allein darstellen soll. Es ist also

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - a^2 \mathfrak{Z} \cos a (x - c t) ,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{d z^2} \cos a (x - c t) .$$

Beide Gleichungen addiert müssen Null geben, was zur Folge hat

$$\frac{d^2 \mathfrak{Z}}{d z^2} = a^2 \mathfrak{Z} .$$

Als Lösung dieser Gleichung haben wir

$$\mathfrak{Z} = A e^{a z} + B e^{-a z} .$$

Am Boden des Gefäßes, d. h. für $z = 0$ kann nun keine Bewegung parallel zur z-Achse stattfinden, es muß hier $w = 0$, also auch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

sein. Es ist aber

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a (A e^{a z} - B e^{-a z}) \cos a (x - c t) .$$

Soll dies für $z = 0$ ebenfalls Null werden, so muß

$$A = B$$


Digitized by Google

sein, woraus resultiert

$$\varphi = A\,(e^{az} + e^{-az}) \cos a\,(x - c\,t)\,.$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit c bedienen wir uns der hydrodynamischen Grundgleichungen (32), in welchen wir die Geschwindigkeiten durch deren Potential ersetzen wollen. Ferner wollen wir annehmen, daß wir es nur mit kleinen Amplituden zu tun haben, so daß wir die Produkte $u \frac{\partial u}{\partial x}$ usw. vernachlässigen können. Wir erhalten dann

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

und zwei analoge Gleichungen nach den beiden anderen Richtungen des Koordinatensystems. Unter V verstehen wir das Potential der Kräfte X, Y, Z. Durch Integration erhalten wir also

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V + \frac{p}{\varrho} = C\,.$$

Auf die Flüssigkeit wirke bloß die Schwere. Dann ist $V = g\,z$ und

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\,z + \frac{p}{\varrho} = C\,.$$

Da wir nur kleine Amplituden annehmen, so können wir den Druck an irgend einer Stelle der Flüssigkeit als unabhängig von der Zeit ansehen, so daß wir durch Differentiation nach t die Gleichung

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial z}{\partial t} = 0$$

erhalten. Nun ist aber

$$\frac{\partial z}{\partial t} = w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,,$$

Digitized by Google

mithin

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 .$$

Aus unserer Lösung für φ finden wir jetzt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -a^2 c^2 A (e^{az} + e^{-az}) \cos a(x - c t)$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = a A (e^{az} - e^{-az}) \cos a (x - c t) .$$

Setzen wir hier für z eine beliebige Höhe h der Flüssigkeit ein und bilden mit den so erhaltenen Werten die Gleichung $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, so erhalten wir daraus den Wert der Fortpflanzungsgeschwindigkeit c für die betreffende Höhe h der Flüssigkeit. Dieser ist gegeben durch

$$c^2 = \frac{g}{a} \cdot \frac{e^{ah} - e^{-ah}}{e^{ah} + e^{-ah}} .$$

Den Wert für a können wir sehr leicht finden, wenn wir die Wellenlänge λ einführen. Wächst nämlich x um λ, so muß sich derselbe Zustand wiederholen. Es muß also $a \lambda = 2 \pi$, folglich

$$a = \frac{2\pi}{\lambda}$$

sein, woraus folgt

$$c^2 = \frac{g \lambda}{2 \pi} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}} .$$

Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängig, was zur Folge hat, daß Dispersion der Wellen eintritt.

Digitized by Google

Ferner ändert sie sich mit der Höhe der Flüssigkeit. Jede Störung in einer Flüssigkeit wird daher bei der Fortpflanzung sofort ihre Gestalt ändern, wenn sie nicht einer harmonischen Kurve entspricht. Ist h gegenüber λ sehr groß, so wird

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Diese Formel gilt demnach an der Oberfläche tiefer Gewässer. Es ist dort also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen einfach der Wurzel aus der Wellenlänge proportional.

§ 64. Innere Reibung — Ausfluß aus engen Röhren.

Eine bewegte Flüssigkeit, welche in einem Gefäß sich selbst überlassen wird, kommt allmählich zur Ruhe. Die Ursache davon ist die innere Reibung der Flüssigkeit. Strömen nämlich zwei parallele Flüssigkeitsschichten mit verschiedener Geschwindigkeit, so übt die schnellere auf die langsamere eine Beschleunigung, die langsamere auf die schnellere eine Verzögerung aus.

Wir nehmen der Einfachheit halber ebene Schichten an. Die Geschwindigkeit ändere sich von Schicht zu Schicht in linearem Verhältnis. Nach Newton ist dann die innere Reibung

$$R = -\eta f \frac{du}{dz}. \tag{37}$$

Diese Gleichung besagt folgendes. Ändert sich die Geschwindigkeit u der Schichte senkrecht zu ihrer Bewegungsebene im Verhältnis $\frac{du}{dz}$, so übt auf eine Ebene von der Größe f die darunter befindliche Flüssigkeits-

Digitized by Google

schichte in der Richtung der Bewegung einen Zug $-\eta f \frac{du}{dz}$ aus. η ist eine Konstante der Flüssigkeit. Man nennt sie die Reibungskonstante oder den Reibungskoeffizienten.

Wir wollen den Einfluß der inneren Reibung auf die Bewegung von Flüssigkeiten in engen Röhren untersuchen. Bezüglich der Röhrenachse sei alles symmetrisch angeordnet. Wir bilden uns einen Elementar-Zylinder, indem wir um die Achse zwei Zylinderflächen vom Radius r und $r + dr$ legen. Die Länge des Zylinders sei ξ. Die Bewegung der Flüssigkeit sei stationär, d. h. die Summe aller Kräfte, welche an unserem Zylinder angreifen, muß Null sein. Auf die linke Seite des Zylinders, dessen Achse wir uns horizontal denken, wirke der Druck p, das ergibt die Kraft $2\pi r\,dr \cdot p$. Von der rechten Seite her haben wir die Kraft $-2\pi r\,dr\,p'$. Nun ist

$$p' = p + \frac{dp}{dx}\xi,$$

mithin der resultierende Druck

$$2\pi r\,dr\,(p - p') = -2\pi r \xi \frac{dp}{dx} dr.$$

Zu dieser Kraft kommen noch die Reibungskräfte. Für die innere Zylinderfläche haben wir nach Gleichung (37)

$$R = -2\pi r \xi \eta \frac{du}{dr},$$

für die äußere

$$R' = R + \frac{dR}{dr} dr.$$

Digitized by Google

Beide Kräfte wirken aber in entgegengesetztem Sinn, weshalb wir sie voneinander zu subtrahieren haben, wonach wir erhalten

$$R - R' = -\frac{dR}{dr}dr = 2\pi\xi\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)dr.$$

Die Summe aller Kräfte, welche an unserem Elementarzylinder angreifen, ist also

$$-2\pi r\xi\frac{dp}{dx}dr + 2\pi\xi\eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)dr = 0,$$

woraus folgt

$$r\frac{dp}{dx} - \eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0.$$

Da der Druck p von r völlig unabhängig angenommen werden soll, so genügt für unsere Gleichung,

$$p = ax + b$$

zu setzen, was zur Folge hat, daß

$$ar - \eta\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0$$

und integriert

$$\frac{ar^2}{2} - \eta r\frac{du}{dr} = C$$

wird. Schreiben wir diese Gleichung

$$\frac{ar}{2} - \eta\frac{du}{dr} = \frac{C}{r}$$

und integrieren nochmals, so bleibt

$$\frac{ar^2}{4} - \eta u = C\,l\,r + D.$$

Für $r = 0$ kann nun die Geschwindigkeit u nicht unendlich groß werden, es muß also $C = 0$ sein. Ferner

Digitized by Google

sei die Geschwindigkeit an der Röhrenwand Null, d. h. für $r = r_1$ ist $u = 0$, daher $D = \frac{a r_1^2}{4}$. Demnach wird unsere Gleichung

$$u = -\frac{a}{4\eta}(r_1^2 - r^2).$$

Diese Formel für die Geschwindigkeit der Flüssigkeit können wir nun benützen, um die Ausflußmenge zu bestimmen. Durch das Querschnittselement $2\pi r\,dr$ wird in der Sekunde das Flüssigkeitsvolumen

$$2\pi u r\,dr = -\frac{\pi a}{2\eta}(r_1^2 - r^2)\,r\,dr$$

fließen. Durch den ganzen Querschnitt strömt daher die Menge

$$-\frac{\pi a}{2\eta}\int_0^{r_1}(r_1^2 - r^2)\,r\,dr = -\frac{\pi a}{2\eta}\left[\frac{r_1^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{r_1}$$

$$= -\frac{\pi a r_1^4}{8\eta} = \frac{\pi(p_1 - p_0)\,r_1^4}{8\eta l},$$

wenn wir unter p_1 den Druck am Anfang, unter p_0 jenen am Ende verstehen, und l die Länge der Röhre ist, da ja dann $a = -\frac{p_1 - p_0}{l}$ wird. Die von uns gewonnene Gleichung enthält das Gesetz von Poiseuille, nach welchem die Ausflußmenge der 4. Potenz des Radius und dem Druckunterschied am Anfang und Ende der Röhre direkt, ihrer Länge verkehrt proportional ist.

Digitized by Google

Akustik.

§ 65. Gegenstand der Akustik — Wellenbewegung — schwingende Bewegung.

Wir behandeln in der Akustik, der Lehre vom Schall, jene Bewegungserscheinungen, welche immer in Begleitung einer Schallwahrnehmung in der Außenwelt auftreten und die man deshalb mit Recht als die physikalische Ursache des Schalls ansieht.

Unser Gehör wird durch die Bewegungen der Luft erregt, welche in unsere Ohrmuschel gelangen. Die Luft pflanzt also den Schall fort; man sagt, sie vollführt eine Wellenbewegung.

Gesetzmäßigkeiten der Schallerregung hat man nur in jenen Erscheinungen gefunden, denen eine sich regelmäßig wiederholende Bewegung als Begleiterscheinung entspricht. Es sind dies die Klänge. Ein Klang wird demnach durch eine sogenannte periodische, eine schwingende Bewegung erzeugt und vom umgebenden Medium, gewöhnlich Luft, zum Ohr fortgepflanzt. Es wird daher unsere Hauptaufgabe sein, die Wellenbewegung und die schwingende Bewegung zu untersuchen.

§ 66. Gleichungen für die Schallbewegung in der Luft.

Die Bewegung der uns umgebenden Luft muß sich durch die im § 57 abgeleiteten hydrodynamischen Grundgleichungen darstellen lassen. Für unsern Zweck vereinfachen sie sich bedeutend, da wir äußere Kräfte völlig ausschließen wollen; ferner sollen alle vorkommenden Geschwindigkeiten sehr klein sein, so daß auch die auftretenden Dichtenänderungen sehr klein ausfallen, weshalb alle Produkte und höheren

Digitized by Google

Potenzen solcher kleinen Größen unbedenklich vernachlässigt werden können.

Die Dichte wollen wir darstellen durch

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \sigma),$$

wobei ϱ_0 die Dichte der ruhenden Luft sein soll, während σ die Abweichung der Dichte von ihrem normalen Zustand angibt. Die Kontinuitätsgleichung wird demnach, da

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \varrho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

ferner σ, u, v, w sehr kleine Größen sind,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{38}$$

Die Bewegungsgleichungen werden, da auch $\frac{\partial u}{\partial x}$ usw. sehr kleine Größen sind,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{39}$$

usw. Wir haben hier die fünf Größen σ, u, v, w, p, deren Abhängigkeit von der Zeit und dem Ort bestimmt werden soll. Dazu ist neben den vier vorhandenen Gleichungen noch eine fünfte nötig. Wir benützen als solche das Poissonsche Gesetz

$$p v^{\varkappa} = p_0 v_0^{\varkappa}, \tag{40}$$

welches in der mechanischen Wärmetheorie begründet wird und die Beziehung zwischen Druck und Volumen eines Gases angibt, wenn die Zustandsänderung eine sogenannte adiabatische ist, d. h. eine solche, bei welcher die Bewegungen so rasch vor sich gehen, daß dabei auftretende Temperaturdifferenzen sich nicht ausgleichen können. $\varkappa$ ist das Verhältnis

Digitized by Google

der spezifischen Wärme der Luft bei konstantem Druck zu jener bei konstantem Volumen und besitzt einen konstanten Wert.

Es unterscheidet sich dieses Gesetz wesentlich vom Boyleschen

$$p v = p_0 v_0,$$

welches die sogenannte isotherme Zustandsänderung angibt, bei welcher die Bewegungen so langsam vor sich gehen, daß sich die auftretenden Temperaturunterschiede immer ausgleichen können.

Da Dichte und Volumen verkehrt proportional sind, so können wir Gleichung (40) auch schreiben

$$\frac{p}{\varrho^{\varkappa}} = \frac{p_0}{\varrho_0^{\varkappa}},$$

oder

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa} = (1 + \sigma)^{\varkappa} = 1 + \varkappa \sigma .$$

Daraus folgt, daß

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p_0 \varkappa \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

ist. Die Gleichungen (39) werden demnach

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

usw., indem wir wieder beachten, daß die Produkte sehr kleiner Größen weggelassen werden können.

Differenzieren wir diese Gleichungen der Reihe nach nach x, y, z und addieren sie, so erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = - \frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0}\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right).$$

Nach Gleichung (38) ist aber

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2},$$

Digitized by Google

was mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung ergibt

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right). \tag{41}$$

§ 67. Punktförmige Schallquelle.

In der Regel entsteht der Schall an einem Punkt, von wo aus er sich nach allen Richtungen fortpflanzt. Einen solchen Punkt wollen wir als Ursprung eines Koordinatensystems ansehen, so daß wir $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ setzen können. Dann ist

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{x}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \cdot \frac{x^2}{r^2}$$

$$+ \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} - \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cdot \frac{x^2}{r^3}.$$

Analoge Gleichungen ergeben sich für $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}$. Alle drei Gleichungen addiert liefern

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r}.$$

Nun ist weiter

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \sigma \right)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \sigma)}{\partial r^2},$$

wonach Gleichung (41) in

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0 r} \frac{\partial^2 (r \sigma)}{\partial r^2}$$

Digitized by Google

übergeht, was wir noch in

$$\frac{\partial^2 (r\sigma)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (r\sigma)}{\partial r^2}$$

umwandeln können, wenn wir $\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0} = a^2$ setzen. Wir wollen etwa noch $r\sigma = \alpha$ schreiben und erhalten so die Gleichung in ihrer einfachsten Form

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2}.$$

§ 68. Geradlinige Fortpflanzung des Schalls.

Wir haben als allgemeine Lösung der zuletzt gewonnenen Gleichung, wie man sich leicht überzeugen kann,

$$\alpha = f(r - at).$$

Mithin ist

$$\sigma = \frac{1}{r} f(r - at).$$

Daraus geht hervor, daß sich jede Dichtenänderung im Erregungspunkt des Schalls in Form einer Kugelwelle fortpflanzt, daß jedoch die Stärke der Dichtenänderung verkehrt proportional dem Radiusvektor r ist.

Ist zur Zeit t' die Welle in r', zur Zeit t'' in r'' angekommen, so muß $r' - at' = r'' - at''$ oder

$$\frac{r'' - r'}{t'' - t'} = a$$

sein, d. h. a ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls. Wir wissen, daß

$$a = \sqrt{\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0}}$$

Digitized by Google

ist. In der Tat liefern die entsprechenden Werte des p_0, ϱ_0 und $\varkappa$ für Luft als Schallgeschwindigkeit die beobachtete Größe.

Newton, welcher schon eine mathematische Theorie der Fortpflanzung des Schalls gab, erhielt für die Geschwindigkeit $\sqrt{\frac{p_0}{\varrho_0}}$, einen zu kleinen Wert, weil er für die Zustandsänderung der Luft das Boylesche Gesetz als richtig voraussetzte.

§ 69. **Planwellen.**

Hat sich der Schall schon weit von seinem Ursprung entfernt, so können wir ein kleines Stück der Kugelwelle als eben, mithin eine einzige Fortpflanzungsrichtung des Bewegungszustands aller Punkte annehmen. Eine solche Welle nennen wir dann eine Planwelle.

Wir wollen für ihre Bewegung Gleichung (41) in der Form

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right) \tag{42}$$

benützen. Wie durch Differentiation leicht zu erkennen, haben wir als allgemeine Lösung dafür

$$\sigma = f(x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - a\,t).$$

Es pflanzt sich in diesem Fall der Schall demnach ungeschwächt in jener Richtung fort, welche mit den Achsen des Koordinatensystems die Winkel α, β, γ einschließt.

§ 70. **Reflexion des Schalls.**

Geht die Schallbewegung bloß parallel zur xz-Ebene vor sich, so ist $\cos\beta = 0$, es wird

$$\sigma = f(x \cos\alpha + z \cos\gamma - a\,t). \tag{43}$$

Digitized by Google

Die xy-Ebene sei nun eine starre Wand, auf welche die Planwelle trifft. Die Geschwindigkeit der Luftteilchen parallel zur z-Achse muß in dieser Ebene beständig gleich Null sein, d. h. es muß

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

sein, was erfüllt ist, wenn

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$$

ist.

Finden in einem Punkt infolge mehrerer durchgehender Wellen mehrere Dichtenänderungen statt, so ist die resultierende Dichtenänderung gleich der algebraischen Summe der einzeln auftretenden. Soll daher die Bedingung $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$ für die xy-Ebene erfüllt sein, so brauchen wir zur vorhandenen Welle nur noch eine zweite hinzuzufügen, welche dem Punkt in der xy-Ebene die entgegengesetzte Bewegung zu erteilen sucht. Für unsere Welle ist nun

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \cos\gamma \cdot f'.$$

Konstruieren wir also noch eine zweite, für welche

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\cos\gamma \cdot f'$$

ist, so erfüllen beide Wellen die Bedingung, daß in der xy-Ebene keine Geschwindigkeit parallel zur z-Achse vorkommt.

Während also nach Gleichung (43) ein Wellenzug von oben kommend die xy-Ebene durchsetzt, muß gleichzeitig ein zweiter als vorhanden gedacht werden,

Digitized by Google

für welchen

$$\sigma = f(x \cos\alpha - z \cos\gamma - a t),$$

der also genau das Spiegelbild des ersten ist. Trifft demnach die Planwelle auf die starre xy-Ebene, so wird sie durch eine neue ersetzt, deren Richtung nach den bekannten Gesetzen der Reflexion gefunden wird.

§ 71. Brechung des Schalls.

Wir untersuchen jetzt, welchen Weg der Schall nimmt, wenn er von einem Gas in ein anderes übergeht, das etwa vom ersteren durch eine sehr dünne, vollkommen biegsame Kautschukmembran getrennt ist. Die Trennungsfläche sei eine Ebene, die wir zur xy-Ebene machen.

Trifft ein Wellenzug von oben auf die Trennungsfläche, so wird dadurch die weitere Fortpflanzung gestört werden. Es werden im allgemeinen neue Bewegungserscheinungen auftreten, die sich teilweise im alten Medium, teilweise im neuen fortpflanzen. Für die Trennungsfläche selbst müssen wir der Kontinuität halber annehmen, daß dort der Druck und ebenso die Geschwindigkeit der Teilchen parallel zur z-Achse in beiden Gasen gleich ist. Nun wissen wir, daß der Druck

$$p = p_0 \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\varkappa} = p_0 (1 + \sigma)^{\varkappa} = p_0 (1 + \varkappa\, \sigma)$$

ist, indem wiederum σ als klein vorausgesetzt wird. Für ein zweites Gas haben wir

$$p_1 = p_0 (1 + \varkappa_1 \sigma_1).$$

Für die Gleichheit beider Drucke gilt

$$\varkappa\, \sigma = \varkappa_1\, \sigma_1 .$$

Digitized by Google

Ferner soll die Geschwindigkeit w, also auch $\frac{\partial w}{\partial t}$ für beide Gase an der Trennungsebene dieselbe sein. Wir wissen, daß

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z}.$$

Es muß daher die Gleichung bestehen

$$a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial z} = a_1^2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}.$$

Die Dichtenänderung σ rührt zum Teil von der einfallenden, zum Teil von der reflektierten Bewegung her. Wir wollen deshalb

$$\sigma = \sigma' + \sigma''$$

setzen. Es sei

$$\sigma' = A' f \left(\frac{x \cos \alpha' + y \cos \beta' + z \cos \gamma'}{a} - t \right).$$

Von der Möglichkeit dieser Lösung für Gleichung (42) kann man sich leicht überzeugen. Analog sei

$$\sigma'' = A'' F \left(\frac{x \cos \alpha'' + y \cos \beta'' + z \cos \gamma''}{a} - t \right)$$

und

$$\sigma_1 = A_1 \psi \left(\frac{x \cos \alpha_1 + y \cos \beta_1 + z \cos \gamma_1}{a_1} - t \right).$$

Wir wollen $\cos \beta' = 0$ wählen, d. h. die Fortpflanzung der ursprünglichen Erregung geschehe parallel zur x z-Ebene. Es ist dann

$$\sigma' = A' f \left(\frac{x \cos \alpha' + z \cos \gamma'}{a} - t \right).$$

Für alle Werte von x, y und t soll nun

$$\varkappa \sigma' + \varkappa \sigma'' = \varkappa_1 \sigma_1 \tag{44}$$

sein. Dies ist erstens nur möglich, wenn auch σ'' und σ_1 von y völlig unabhängig, d. h. wenn

Digitized by Google

$$\cos\beta'' = \cos\beta_1 = 0$$

ist. Es liegt demnach die Fortpflanzungsrichtung der reflektierten und der im zweiten Medium weitergehenden Bewegung mit der ursprünglichen in einer Ebene.

Soll Gleichung (44) für alle Werte des x gelten, so wird für $x = 0$

$$\varkappa A' f(-t) + \varkappa A'' F(-t) = \varkappa_1 A_1 \varphi(-t).$$

Das ist aber nur möglich, wenn

$$f(-t) = F(-t) = \varphi(-t)$$

ist. Desgleichen hat (44) für alle Zeiten, also auch für $t = 0$ zu gelten, wonach

$$\varkappa A' f\left(\frac{x\cos\alpha'}{a}\right) + \varkappa A'' f\left(\frac{x\cos\alpha''}{a}\right) = \varkappa_1 A_1 f\left(\frac{x\cos\alpha_1}{a_1}\right)$$

wird. Wir gelangen danach zur Folgerung

$$\frac{x\cos\alpha'}{a} = \frac{x\cos\alpha''}{a} = \frac{x\cos\alpha_1}{a_1}.$$

Diese Gleichung enthält sowohl das Reflexions- als das Brechungsgesetz; denn aus ihr folgt $\cos\alpha' = \cos\alpha''$ oder

$$\alpha' = \alpha''$$

und $\frac{\cos\alpha'}{a} = \frac{\cos\alpha_1}{a_1}$ oder, da $\cos\alpha' = \sin\gamma'$, $\cos\alpha_1 = \sin\gamma_1$,

$$\frac{\sin\gamma'}{\sin\gamma_1} = \frac{a}{a_1}.$$

§ 72. Dopplers Prinzip.

Wir wollen von nun an nur noch periodische Bewegungen der Luft in Betracht ziehen. Die einfachste Form derselben ist

Digitized by Google

$$\sigma = c \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right).$$

Eine solche einfache schwingende Bewegung nennen wir einen Ton. c ist die Amplitude, τ die Dauer, ε die Phase der Schwingung. Die Schwingungsdauer τ oder deren reziproker Wert, die Schwingungszahl $n = \frac{1}{\tau}$, bestimmt die Tonhöhe.

Eine Schallquelle gebe einen Ton von der Schwingungszahl n und bewege sich in der Fortpflanzungsrichtung des Schalls mit der Geschwindigkeit v. In einer Sekunde legt der Schall die Strecke a (Schallgeschwindigkeit) zurück, folglich befinden sich auf der Strecke a—v n Wellen, auf der Strecke a ist demnach die Zahl der Wellen $n\frac{a}{a-v}$. Diese treffen in der Sekunde das Ohr, welches somit einen Ton von der Schwingungszahl $n\frac{a}{a-v}$ hört. Nähert sich also die Schallquelle dem Ohr, so ist der Ton höher, entfernt sie sich (wird v negativ), so ist er tiefer, als wenn die Entfernung, Schallquelle—Ohr, konstant bleibt.

Ist die Tonquelle in Ruhe, so gehn auf die Strecke a in der Fortpflanzungsrichtung des Schalls n Wellen. Diese passieren in einer Sekunde das ruhende Ohr. Nähert sich das Ohr der Tonquelle mit der Geschwindigkeit v, so ist die relative Geschwindigkeit des Schalls gegenüber dem Ohr $a + v$, somit passieren $\frac{a+v}{a}n$ Wellen in der Sekunde das Ohr, der Ton ist höher geworden. Bei entgegengesetzt gerichteter Bewegung des Ohrs

Digitized by Google

wird der Ton vertieft. Die letzte Formel ist nicht identisch mit der früheren; nur wenn v gegen a klein ist, geben beide dasselbe Resultat.

Man nennt diese Vergrößerung, bezüglich Verkleinerung der Schwingungszahl durch die Bewegung des schwingenden Körpers oder des Ohrs in der Fortpflanzungsrichtung des Schalls nach seinem Begründer das Dopplersche Prinzip.

§ 73. Interferenz der Schallwellen.

Wirken mehrere Kräfte in einem Punkt so zusammen, daß gleichzeitig mehrere Dichtenänderungen derselben Periode daselbst entstehen würden, so wird

$$\sigma = \Sigma c \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right) = \cos\frac{2\pi t}{\tau} \Sigma c \cos\varepsilon + \sin\frac{2\pi t}{\tau} \Sigma c \sin\varepsilon$$

sein. Dieser Ausdruck stellt wieder eine einfache harmonische Schwingung dar; denn setzen wir

$$\Sigma c \cos\varepsilon = r\cos\vartheta, \quad \Sigma c \sin\varepsilon = r\sin\vartheta,$$

so wird

$$\sigma = r\cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \vartheta\right).$$

r und ϑ lassen sich leicht bestimmen, da ja

$$r^2 = (\Sigma c \cos\varepsilon)^2 + (\Sigma c \sin\varepsilon)^2$$

und

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\Sigma c \sin\varepsilon}{\Sigma c \cos\varepsilon}$$

ist. Die Erfahrung bestätigt unsere Formel, bleibt doch eine Melodie dieselbe, ob sie von einem einzigen Instrument oder vom ganzen Orchester unisono gespielt wird. Diese Vereinigung mehrerer Schwingungen

Digitized by Google

zu einer einzigen nennt man **Interferenz der Schwingungen.**

Wir wollen als speziellen Fall das Zusammenwirken zweier Schwingungen betrachten. Wir erhalten dafür

$$r^2 = (c \cos \varepsilon + c' \cos \varepsilon')^2 + (c \sin \varepsilon + c' \sin \varepsilon')^2$$
$$= c^2 + c'^2 + 2\, c\, c' \cos(\varepsilon - \varepsilon').$$

Die Größe der neuen Amplitude hängt also wesentlich vom Phasenunterschied $\varepsilon - \varepsilon'$ ab. Ist $\varepsilon - \varepsilon' = 2\, k\, \pi$, wobei $k = 0, 1, 2$ usw. sein kann, so ist

$$r = c + c'.$$

Für $\varepsilon - \varepsilon' = (2\, k + 1)\, \pi$ wird

$$r = c - c'.$$

In dem einen Fall tritt eine Verstärkung, im andern eine Schwächung des Tons ein, ja ist $c = c'$, so heben sich im letztern Fall die Schwingungen vollständig auf. Es entsteht überhaupt kein Ton. Es zeigen sich diese Erscheinungen am besten an **Quinckes Interferenzröhren** und **Stefans Interferenzapparat.**

§ 74. Schwebungen — Differenztöne.

Wir lassen jetzt zwei Schwingungen verschiedener Dauer auf einen Punkt einwirken. Wir haben dann

$$\sigma = c \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right) + c' \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau'} - \varepsilon'\right).$$

Im allgemeinen stellt σ keine harmonische Schwingung dar, ja wenn τ und τ' inkommensurable Größen sind, so wiederholt sich ein gegebener Zustand überhaupt nie wieder.

Wir wollen

$$\frac{1}{\tau} = m, \quad \frac{1}{\tau'} = n$$

Digitized by Google

setzen und m und n die Schwingungszahlen nennen. Wir haben jetzt

$$\sigma = c \cos(2\pi m t - \varepsilon) + c' \cos(2\pi n t - \varepsilon')$$

$$= c \cos(2\pi m t - \varepsilon) + c' \cos[2\pi m t - 2\pi(m - n) t - \varepsilon'] .$$

Ist m von n nur wenig verschieden, so vermag das Ohr die beiden Töne nicht mehr zu unterscheiden, da ja für die Tonhöhe lediglich die Schwingungszahl maßgebend ist. Die Amplitude des Tons ist nun nach dem Vorhergehenden

$$r = \sqrt{c^2 + c'^2 + 2 c c' \cos[-2\pi(m - n) t + \varepsilon - \varepsilon']} .$$

Es ist demnach die Amplitude eine Funktion der Zeit. Setzen wir der Einfachheit halber $\varepsilon - \varepsilon' = 0$, so wird

$$r = c + c'$$

ein Maximum für $2\pi\ (m - n)\ t = 0,\quad 2\pi,\quad 4\pi \ldots,$ hingegen wird

$$r = c - c'$$

ein Minimum für $2\pi(m - n) t = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi \ldots$ Wir haben also wiederum eine periodische Bewegung vor uns, die sich als Anschwellen und Abnehmen des Tons, als Schwebung geltend macht. Die Dauer einer Schwebung ist

$$\tau = \frac{1}{m - n} .$$

$m - n$ können wir analog die Schwingungszahl nennen. Wird $m - n$ genügend groß, so hören wir beide Töne, und auch die Schwebungen nehmen den Charakter eines Tons an, den wir den Differenzton nennen. Der Differenzton wird um so tiefer sein, je näher aneinander die zwei erzeugenden Töne liegen.

§ 75. Einfach schwingende Bewegung.

Wir betrachten ein materielles System, welches sich nur so bewegen kann, daß durch die Lage eines einzelnen

Digitized by Google

Punkts die jeweilige Lage des Systems bestimmt ist. Das wäre z. B. der Fall für einen starren Körper, welcher keine Drehung vollführt, sondern nur fortschreitende Bewegung. Das System habe die Eigenschaft, daß jede Verlegung aus seiner Ruhelage Kräfte hervorruft, welche proportional der Entfernung von der Ruhelage sind und das System in die Ruhelage zurückzubringen suchen. Ist die Masse des Systems m, seine Entfernung aus der Ruhelage s, so erhalten wir die Kraftgleichung

$$m\frac{d^2 s}{d t^2} = -\alpha s.$$

Wir haben als Lösung dafür

$$s = A \cos(a t - \varepsilon)$$

(§ 9), wenn wir $\frac{\alpha}{m} = a^2$ setzen. Das System macht also eine einfach schwingende Bewegung, erzeugt einen Ton von der Schwingungszahl

$$n = \frac{a}{2\pi}.$$

§ 76. Einfluß eines widerstehenden Mittels.

Unser Körper soll in einem Mittel schwingen, welches einen Widerstand proportional der Geschwindigkeit des Körpers leistet. Dann wird die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2 s}{d t^2} = -\alpha s - \beta\frac{d s}{d t}.$$

Hierfür ist die Lösung (§ 10)

$$s = A e^{-b t} \cos\left(\sqrt{a^2 - b^2}\, t - \varepsilon\right),$$

wenn $\frac{\alpha}{m} = a^2$, $\frac{\beta}{m} = 2b$ gesetzt wird. Die Schwingungs-

Digitized by Google

zahl ist

$$n = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2\pi}.$$

Es wird also erstens der Ton gedämpft, der Körper hört allmählich auf zu tönen, ferner wird die Tonhöhe erniedrigt.

§ 77. Resonanz.

Auf unser System im widerstehenden Mittel wirke eine periodische Kraft, etwa die Luftschwingungen eines in seiner Nähe erzeugten Tons. Die Kraft, welche diese periodische Bewegung auf unsern Körper ausübt, sei durch $P \cos p t$ gegeben. Die Bewegungsgleichung wird demnach

$$m \frac{d^2 s}{d t^2} = -\alpha s - \beta \frac{d s}{d t} + P \cos p t,$$

oder

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + a^2 s + 2 b \frac{d s}{d t} = E \cos p t,$$

wenn $\frac{P}{m} = E$. Als ein Integral dieser Gleichung können wir

$$s = A \cos (p t - \varepsilon)$$

ansehen. Bilden wir $\frac{d s}{d t}$ und $\frac{d^2 s}{d t^2}$, ferner

$$E \cos p t = E \cos [(p t - \varepsilon) + \varepsilon] = E \cos \varepsilon \cos (p t - \varepsilon) \\ - E \sin \varepsilon \sin (p t - \varepsilon),$$

und beachten wir, daß ε ganz willkürlich, so müssen die Glieder mit dem Faktor $\cos (p t - \varepsilon)$ für sich, ebenso jene mit dem Faktor $\sin (p t - \varepsilon)$ die Gleichung befriedigen. Daraus ergibt sich

$$A (a^2 - p^2) = E \cos \varepsilon, \quad 2 A b p = E \sin \varepsilon,$$

Digitized by Google

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\,b\,p}{a^2 - p^2}, \quad A = \frac{E \sin \varepsilon}{2\,b\,p}.$$

Wir werden also unter sonst gleichen Verhältnissen die größte Amplitude erhalten, d. h. der Körper wird unter dem Einfluß der äußeren Kraft um so heftiger ins Mitschwingen geraten, je größer $\sin \varepsilon$ und je kleiner b wird. b muß einen endlichen Wert haben. Ist $a = p$, so wird $\operatorname{tg} \varepsilon = \infty$, $\sin \varepsilon = 1$, hat somit seinen größten Wert, d. h. wir erhalten die stärkste Resonanz, wenn die auf den Körper einwirkende Kraft dieselbe Periode hat wie die Eigenschwingung des Körpers.

§ 78. Bewegungsgleichung schwingender Saiten.

Wir denken uns eine Saite in zwei Punkten A, B (Fig. 19) mit der Spannung P befestigt und bringen sie aus ihrer Ruhelage, jedoch so, daß sie eine ebene Kurve bildet. Das kleine Stück MN gelange dabei nach M′N′. Die Entfernung aus der Ruhelage sei ebenfalls sehr klein, so daß die Änderung der Spannung gegenüber der ursprünglichen Spannung völlig zu vernachlässigen ist. An dem Saitenstück M′N′ greifen nun zwei Kräfte an, welche verschiedene Richtungen, nämlich jene der Tangenten in den Punkten M′ und N′ an die Saite haben. Die Ruhelage der Saite sei die x-Achse eines Koordinatensystems und α der Winkel, welchen sie mit der Tangente in M′ einschließt. Dann haben wir in M′ eine Kraft

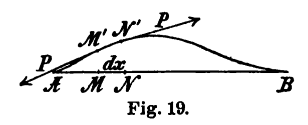


Fig. 19.

$$P \sin \alpha = P \frac{\partial y}{\partial x}$$

Digitized by Google

parallel zur y-Achse, da wir wegen der Kleinheit des Winkels α Sinus und Tangente desselben vertauschen können. Gleicherweise wirkt in N' die Kraft $P' \sin \alpha$. Nun ist

$$\sin \alpha' = \sin \alpha + \frac{\partial \sin \alpha}{\partial x} dx = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

wenn wir $MN = dx$ setzen. Die Kraft in N' wirkt in der Richtung der y-Achse, die in M' entgegengesetzt. Die Resultierende ist also

$$P \sin \alpha' - P \sin \alpha = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Ist die Dichte der Saite σ, der Querschnitt q, so hat das Stück MN die Masse $q \sigma dx$, und seine Bewegungsgleichung wird

$$q \sigma dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{q \sigma} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{45}$$

wenn wir $\frac{P}{q \sigma} = a^2$ setzen.

§ 79. Lösung von d'Alembert.

Wir erhielten für die Transversalschwingungen einer Saite dieselbe Gleichung wie für eine Planwelle im Luftraum (§ 69). Wir lernten die von d'Alembert gefundene Lösung

$$y = f(x - a t)$$

kennen. Aber auch

Digitized by Google

$$y = F(x + a t)$$

ist eine Lösung, wie man sich leicht durch Differentiation überzeugen kann. Es gilt daher auch

$$y = F(x + a t) + f(x - a t).$$

Die Funktionen F und f bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen der Bewegung. Es genügt, für $t = 0$ die Elongationen y und die Geschwindigkeiten $\frac{\partial y}{\partial t}$ sämtlicher Punkte zu kennen. Es sei demnach für den Anfang

$$y = \varphi(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \psi(x).$$

Wir haben dann

$$\varphi(x) = F(x) + f(x)$$

und

$$\psi(x) = a F'(x) - a f'(x).$$

Durch Integration erhalten wir

$$\frac{1}{a}\int_0^x \psi(x)\, dx = F(x) - f(x) - F(0) + f(0).$$

Diese Gleichung mit jener für $\varphi(x)$ ergibt

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(x)\, dx - \frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}f(0)$$

und

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(x)\, dx + \frac{1}{2}F(0) - \frac{1}{2}f(0),$$

daher

Digitized by Google

$$y = F(x + at) + f(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2}\varphi(x - at) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x)\,dx\,.$$

§ 80. Unendlich lange Saite.

Die von uns gefundene Lösung gilt nur für eine unendlich lange Saite, da wir nur in diesem Fall für jeden Wert der Zeit auch Werte der Funktionen φ und ψ haben.

Wir nehmen nun an, daß für $t = 0$ kein Punkt der Saite in Bewegung sei, daß also für jedes x $\psi(x) = 0$ ist. Unsere Lösung geht dann in die einfachere über

$$y = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2}\varphi(x - at)\,. \tag{46}$$

Für alle Punkte der nach beiden Richtungen unendlich langen Saite sei $y = 0$, nur für eine kleine Stelle um den Nullpunkt habe $y = \varphi(x)$ endliche Werte. Nach Gleichung (46) teilt sich dieser Wert in zwei Teile, d. h. die ursprüngliche Ausbuchtung der Saite teilt sich in zwei halb so große, von denen mit der Geschwindigkeit a die eine nach rechts, die andere nach links längs der Saite fortläuft.

§ 81. Einseitig begrenzte Saite.

Läuft eine Welle gegen einen bestimmten Punkt der Saite, so können wir uns gleichzeitig von der andern Seite eine zweite Welle kommend denken, welche dem Punkt genau die entgegengesetzte Elongation geben würde. Das hat den Erfolg, daß der Punkt selbst immer in Ruhe bleibt. Wir

Digitized by Google

können ihn daher von vornherein **fest** machen und den einen Teil der Saite ganz weglassen. Gelangt dann eine Wellenbewegung gegen diesen Punkt, so wird sie einfach mit **entgegengesetzter Amplitude** reflektiert.

Wir stellen nun die Bedingung, daß der Endpunkt einer einseitig begrenzten Seite eine bestimmte Bewegung $y = f(t)$ mache. Für $t = 0$ sei die ganze Saite noch in Ruhe. Es gilt für sie dann Gleichung (46), und es muß für $x = 0$ demnach

$$f(t) = \frac{1}{2}\varphi(a\,t) + \frac{1}{2}\varphi(-a\,t)$$

sein. Machen wir noch die Voraussetzung, daß für $t = 0$ auch sämtliche Punkte der Saite in ihrer Ruhelage sind, dann ist für alle positiven Werte von x die Größe $\varphi(x) = 0$, folglich auch $\varphi(a\,t) = 0$. Es bleibt also nur

$$\frac{1}{2}\varphi(-a\,t) = f(t),$$

was weiter ergibt

$$y = \frac{1}{2}\varphi(x - a\,t) = \frac{1}{2}\varphi[-(a\,t - x)] = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Es pflanzt sich also der jeweilige Bewegungszustand am Anfangspunkt mit der Geschwindigkeit a längs der Saite fort.

§ 82. Schwingungsdauer einer in zwei Punkten befestigten Saite.

Bringen wir einen Punkt einer an beiden Enden befestigten Saite aus seiner Ruhelage und überlassen dann die Saite sich selbst, so wird sich diese Deformation nach beiden Richtungen der Saite in halber

Digitized by Google

Stärke fortpflanzen. Wie wir in § 81 gesehen haben, wird an den Befestigungspunkten die Welle mit entgegengesetzter Amplitude reflektiert, sie durchläuft dann die ganze Saite, wird am andern Befestigungspunkt ebenfalls reflektiert und kehrt so, wie sie ausgegangen ist, wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück. Dort beginnt dann das Spiel von neuem. Die Zeit, welche dabei verfließt, können wir die Schwingungsdauer der Saite nennen. Die Saite habe die Länge l, ein Punkt in der Entfernung x vom Anfangspunkt werde aus seiner Ruhelage gebracht und dann sich frei überlassen. Es bewegt sich nach links und rechts von x aus eine Welle mit der Geschwindigkeit a. Die Welle, welche nach rechts geht, legt bis zur ersten Reflexion den Weg $l - x$, von hier bis zur zweiten den Weg l und von hier bis zur ursprünglichen Lage den Weg x, im ganzen also

$$l - x + l + x = 2l$$

zurück. Denselben Weg durcheilt die entgegengesetzt laufende Welle. a ist die Wellengeschwindigkeit, daher

$$\tau = \frac{2l}{a}$$

die Zeit des Durchlaufens, d. i. die Schwingungsdauer der Saite. Wegen $a^2 = \frac{P}{q\sigma}$ haben wir demnach für die Schwingungsdauer

$$\tau = 2l\sqrt{\frac{q\sigma}{P}},$$

für die Schwingungszahl

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{P}{q\sigma}},$$

eine Formel, die sich experimentell bestätigt.

Digitized by Google

§. 83. Bernoullis Lösung.

Wir versuchen, ob Gleichung (45) durch

$$y = X\,T$$

befriedigt wird, wobei X eine Funktion von x, T eine Funktion von t ist. t ist also in X, x in T nicht enthalten. Es ist somit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

und es muß

$$X\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = a^2\,T\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},$$

$$\frac{1}{a^2\,T}\,\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{1}{X}\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}$$

sein. Da wir hier auf der einen Seite nur die Zeit t, auf der andern nur die Abszisse x als Veränderliche haben, so ist die Gleichung nur möglich, wenn jeder dieser Ausdrücke gleich einer Konstanten $-b^2$ ist. Wir erhalten so zwei Gleichungen

$$\frac{d^2 X}{d x^2} = -b^2 X, \qquad \frac{d^2 T}{d t^2} = -a^2 b^2 T,$$

deren Lösungen periodische Funktionen sind (§ 9), die wir zusammenfassen können in

$$y = \left(A\sin\frac{\alpha x}{a} + B\cos\frac{\alpha x}{a}\right)\sin\alpha t$$
$$+ \left(C\sin\frac{\alpha x}{a} + D\cos\frac{\alpha x}{a}\right)\cos\alpha t,$$

wenn wir $b = \frac{\alpha}{a}$ setzen.

§ 84. Grundton und Obertöne.

Die Saite sei an beiden Enden fest. Es muß dann zu jeder Zeit für $x = 0$ und $x = l$, auch $y = 0$ werden,

Digitized by Google

woraus erstens $B = D = 0$ folgt und nur

$$y = \sin \frac{\alpha x}{a} (A \sin \alpha t + C \cos \alpha t)$$

übrig bleibt. Damit ferner für $x = l$, $y = 0$ wird, muß $\sin \frac{\alpha l}{a} = 0$ oder $\frac{\alpha l}{a} = \pi,\ 2\pi\ \ldots,$

$$\alpha = \frac{\pi a}{l},\ \frac{2\pi a}{l} \ldots \frac{k\pi a}{l}$$

sein.

Wieder ist hier $\tau = \frac{2\pi}{\alpha}$ die Schwingungsdauer,

$$n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{a}{2l},\ \frac{2a}{2l} \ldots \frac{ka}{2l}$$

die Schwingungszahl. Es kann also die Saite eine unendliche Zahl von Tönen hervorbringen, deren tiefster

$$n = \frac{a}{2l}$$

ist, eine Lösung, die wir schon früher fanden (§ 82). Diesen tiefsten Ton nennt man den Grundton, die übrigen die Obertöne der Saite, und da sie ganzzahlige Vielfache des Grundtons sind, harmonische Obertöne. Gibt die Saite nur den ersten Oberton, so schwingt sie in zwei Teilen, sie hat in der Mitte einen Knoten. Beim zweiten Oberton schwingt sie in drei Teilen mit zwei Knoten usw.

§ 85. **Klänge.**

Die Saite kann nicht nur einzeln ihren Grundton und ihre Obertöne geben, sondern auch alle gleichzeitig, da ja

Digitized by Google

$$y = \Sigma \sin \frac{k \pi x}{l} (A_k \sin k \alpha t + C_k \cos k \alpha t) \qquad (47)$$

ebenfalls unsere Gleichung (45) befriedigt. Wir haben dann keinen einfachen Ton, sondern einen Klang. Die Gleichung dafür ist also im allgemeinen eine unendliche Reihe, welche bestimmt ist, sobald wir den Anfangszustand der Saite, d. h. die Elongation und die Geschwindigkeit eines jeden Punktes kennen, wenn also für $t = 0$ die Form der Saite durch $y = \varphi(x)$, ihre Geschwindigkeit durch $\frac{\partial y}{\partial t} = \psi(x)$ gegeben ist. Wir haben dann

$$\varphi(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \sin \frac{2 \pi x}{l} + \ldots,$$

$$\psi(x) = A_1 \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + 2 A_2 \alpha \sin \frac{2 \pi x}{l} + \ldots$$

Es wird in der höheren Analysis nun gezeigt, daß für eine derartige Reihe die Konstanten A und C durch die Formel bestimmt sind:

$$C_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k \pi x}{l} dx.$$

Wir sind somit in der Lage, auf diese Weise die Werte der A und C, d. h. die Amplitude der einzelnen Obertöne zu finden.

§ 86. Gleichung für die Longitudinalschwingungen in Stäben.

Denken wir uns einen Stab mit seiner Länge parallel zur x-Achse eines Koordinatensystems, so nennt man Longitudinalschwingungen jene, bei welchen sich die Teilchen parallel zur x-Achse bewegen.

Digitized by Google

Wir legen senkrecht durch unsern Stab zwei parallele Ebenen, welche um dx voneinander entfernt sind. Diese schneiden aus dem Stab ein Stück von der Masse $q\,dx\,\sigma$ heraus, wenn q der Querschnitt, σ die Dichte des Stabs ist. Befindet sich dieses Stabelement nicht in seiner Ruhelage, so werden auf beiden Seiten Spannkräfte wirken.

Wenn wir einen Stab mit der Kraft P dehnen, so erfährt er eine Verlängerung

$$\lambda = \frac{l P}{q E},$$

wenn l die Länge des Stabes ist. Die Konstante E nennt man den Elastizitätskoeffizienten. Danach finden wir die Spannkräfte, welche auf unser Stabelement wirken, folgendermaßen. Der Querschnitt in der Entfernung x erlangt nach der Dehnung die Lage $x + \xi$, jener in der Entfernung $x + dx$ die Lage $x + dx + \xi'$. Betrachten wir ξ als Funktion von x, so

$$\xi' = \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Die Verlängerung des Stabelements ist nun

$$\lambda = \xi' - \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Daraus folgt

$$P = E q \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Während nun diese Kraft auf der Vorderseite des Stabelements nach links wirkt, greift auf der rechten Seite in entgegengesetzter Richtung eine Kraft

$$P' = P + \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

Digitized by Google

an. Es wirkt mithin die resultierende Kraft

$$P' - P = \frac{\partial P}{\partial x} d x = E q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} d x .$$

Die Kraft muß gleich dem Produkt aus Masse und Beschleunigung des Stabelements sein. Wir erhalten demnach die Gleichung

$$q\, d x\, \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E q \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} d x ,$$

oder

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} ,$$

wenn wir $a^2 = \frac{E}{\sigma}$ setzen.

Wir haben also auch hier genau dieselbe Gleichung wie für die Transversalschwingungen der Saiten oder für die Fortpflanzung einer Planwelle in der Luft. Der einzige Unterschied ist die physikalische Bedeutung der Größe **a**.

Unsere Gleichung können wir auch ohne weiteres auf die Longitudinalschwingungen in gespannten Saiten anwenden, da eine ursprünglich vorhandene Spannung auf die Longitudinalwellen gar nicht von Einfluß ist, indem dieselbe ja über die ganze Saite konstant ist, somit das Saitenelement nach beiden Seiten mit derselben Kraft zu ziehen trachtet. Alle Lösungen, welche wir für die Transversalschwingungen der Saiten fanden, können wir nun ohne weiteres auf die Longitudinalschwingungen der Stäbe übertragen.

Digitized by Google

§ 87. Töne eines an beiden Enden freien Stabes.

Eine Lösung unserer Gleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

ist (§ 83)

$$\xi = \left(A \sin \frac{\alpha x}{a} + B \cos \frac{\alpha x}{a}\right) \sin \alpha t\,.$$

Für ein freies Stabende ist die Spannung natürlich gleich Null, also $E q \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$, was nur möglich ist, wenn

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

ist. Das eine Stabende sei im Ursprung des Koordinatensystems, für das andere ist also $x = l$, unter l die Länge des Stabs verstanden. Dann muß für $x = 0$ und $x = l$, $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ sein. Daraus folgt $A = 0$ und

$$\sin \frac{\alpha l}{a} = 0\,,$$

oder

$$\frac{\alpha l}{a} = k \pi\,,$$

und da $\alpha = 2 \pi n$, so

$$n = \frac{k a}{2 l}\,.$$

Das ist die Schwingungszahl des Tons, welchen der Stab gibt. Da k jede beliebige ganze Zahl sein kann, so sind unendlich viele Töne möglich. $\frac{a}{2 l}$ ist die

Digitized by Google

Schwingungszahl des Grundtons. Es ist also derselbe wie bei der schwingenden Saite. Außer ihm haben wir eine unendliche Reihe harmonischer Obertöne.

Für die Schwingung selbst haben wir

$$\xi = B \cos \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t .$$

Wegen $\alpha = \frac{k \pi a}{l}$ ist $\frac{\alpha x}{a} = \frac{k \pi x}{l}$. Für $k = 1$ wird $\cos \frac{\alpha x}{a} = 0$, wenn wir $x = \frac{l}{2}$ setzen. Das heißt: für den Grundton hat der Stab in seiner Mitte einen Knoten, beim ersten Oberton im ersten und dritten Viertel seiner Länge usw.

Aus der bekannten Schwingungszahl eines Stabs können wir umgekehrt seinen Elastizitätskoeffizienten berechnen.

§ 88. Töne eines an einem Ende befestigten Stabs.

Ist der Stab an seinem Anfangspunkt fest, so muß für $x = 0$ auch $\xi = 0$ sein, woraus für die Lösung

$$\xi = \left(A \sin \frac{\alpha x}{a} + B \cos \frac{\alpha x}{a} \right) \sin \alpha t$$

$B = 0$ folgt. Es ist demnach

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\alpha}{a} A \cos \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t ,$$

was für $x = l$ ebenfalls Null werden muß. Das läuft darauf hinaus, $\cos \frac{\alpha l}{a} = 0$ zu setzen, was

Digitized by Google

$$\frac{\alpha l}{a} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

zur Folge hat, unter k wieder eine beliebige ganze Zahl verstanden. Es muß demnach

$$\alpha = 2\pi n = (2k+1)\frac{a\pi}{2l}$$

sein. Dies ergibt für die Schwingungszahl des Grundtons

$$n = \frac{a}{4l}.$$

Ein solcher Stab gibt also die tiefere Oktav eines gleichartigen, an beiden Enden freien Stabs. Der nächste Oberton hat die Schwingungszahl $n = \frac{3a}{4l}$, der zweitnächste $\frac{5a}{4l}$ usf. Es entfallen also alle ungeradzahligen harmonischen Obertöne.

§ 89. **Offene Pfeifen.**

Wir fanden für die Fortpflanzung einer Planwelle in der Luft die Gleichung (§ 69)

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}.$$

Dieselbe Gleichung bestimmt uns die Bewegung der Luft in Pfeifen, da diese ja auch in nichts anderem als Longitudinalwellen parallel zur Pfeifenachse besteht. Wir haben daher wieder die bekannte Lösung

$$\sigma = \left(A \sin\frac{\alpha x}{a} + B \cos\frac{\alpha x}{a}\right) \sin \alpha t.$$

Bei einer offenen Pfeife steht die innere Luft an beiden Enden der Röhre mit der äußeren in Ver-

Digitized by Google

bindung. An diesen Stellen wird daher keine Dichtenänderung stattfinden können. Denken wir uns also die Achse der Pfeife mit der x-Achse eines Koordinatensystems zusammenfallend, während sich die eine Öffnung im Ursprung $x = 0$, die andere in der Entfernung $x = l$, d. i. die Länge der Röhre, befindet. Für diese Punkte muß somit $\sigma = 0$ werden. Daraus folgt $B = 0$, ferner $\frac{\alpha l}{a} = k\pi$, oder $\alpha = 2\pi n = \frac{k\pi a}{l}$, was für die Schwingungszahl

$$n = \frac{ka}{2l}$$

ergibt. Eine offene Pfeife verhält sich also genau so wie ein an beiden Enden freier, longitudinal schwingender Stab.

§ 90. Gedeckte Pfeifen.

Am gedeckten Ende einer Pfeife können die Luftteilchen keine longitudinalen Bewegungen machen. Es muß demnach hier die Geschwindigkeit $u = 0$ (§ 70) sein. Desgl. ist natürlich auch

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{p_0 \varkappa}{\varrho_0} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 .$$

Als Bedingung für ein gedecktes Pfeifenende erhalten wir demnach

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 .$$

Dies ist bei unserer Pfeife für $x = l$ der Fall, während für $x = 0$, $\sigma = 0$ werden muß. Letztere Bedingung ist in der Lösung

Digitized by Google

$$\sigma = A \sin \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t$$

erfüllt. Danach wird

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\alpha A}{a} \cos \frac{\alpha x}{a} \sin \alpha t,$$

und es muß nach dem Obigen

$$\cos \frac{\alpha l}{a} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{\alpha l}{a} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

werden, woraus wir wegen $\alpha = 2\pi n$

$$n = (2k+1)\frac{a}{4l}$$

erhalten.

Eine solche Pfeife verhält sich demnach ganz so wie ein an einem Ende befestigter Stab. Sie gibt als Grundton die tiefere Oktav einer gleich langen offenen Pfeife, ferner nur die geradzahligen harmonischen Obertöne.

Digitized by Google

Lehrbücher der Mechanik und Akustik.

Zur Weiterbildung auf dem Gebiet der Mechanik und Akustik empfehlen wir:

Boltzmann, Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik. I. Teil. Leipzig 1897.

Christiansen, Elemente der theoretischen Physik. Leipzig 1903.

v. Helmholtz, Vorlesungen über theoretische Physik. I. 1., I. 2., II., III. Leipzig 1903.

— —, Die Lehre von den Tonempfindungen usw. Braunschweig 1877.

Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik und Mechanik. Leipzig 1883.

v. Lang, Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig 1891.

Riemann, Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Braunschweig 1869.

Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik. Braunschweig 1871.

Digitized by Google

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Murner, Thomas. Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrh. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberl. am Nikolaigymn. zu Leipzig. Nr. 7.

Musik, Geschichte der alten und mittelalterlichen, von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbild. und Musikbeilagen. Nr. 121.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) v. Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149. 150.

Musikgeschichte des 19. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164. 165.

Musiklehre, Allgemeine, v. Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Mythologie, Deutsche, von Dr. Friedrich Kauffmann, Professor an der Universität Kiel. Nr. 15.

— siehe auch: Götter- u. Heldensage. — Heldensage.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigations-Schule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

Nibelunge, Der, Nôt in Auswahl und Mittelhochdeutsche Grammatik mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Professor an der Universität Rostock. Nr. 1.

— — siehe auch: Leben, Deutsches, im 12. Jahrhundert.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. d. Großh. landwirtschaftlichen Versuchsanstalt Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität Jena. Nr. 12.

— **Geschichte der,** von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Paläontologie v. Dr. Rud. Hoernes, Prof. an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Perspektive nebst einem Anhang üb. Schattenkonstruktion und Parallelperspektive von Architekt Hans Freyberger, Fachlehrer an der Kunstgewerbeschule in Magdeburg. Mit 88 Abbildungen. Nr. 57.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Prof. a. d. Universität Straßburg i. E. Mit 15 Abbild. Nr. 173.

Pflanze, Die, ihr Bau und ihr Leben von Oberlehrer Dr. E. Dennert. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbild. Nr. 127.

Pflanzen-Morphologie, -Anatomie und -Physiologie von Dr. W. Migula, Professor an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.

Pflanzenreich, Das. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Professor an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Figuren. Nr. 122.

Pflanzenwelt, Die, der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Techn. Hochschule Karlsruhe. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.

Philosophie, Einführung in die. Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Photographie. Von Prof. H. Keßler, Fachlehrer an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbild. Nr. 94.

Physik, Theoretische, I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 19 Abbild. Nr. 76.

— — II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

— — III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Universität Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

Digitized by Google

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Plastik, Die, des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Konservator am German. Nationalmuseum zu Nürnberg. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Poetik, Deutsche, von Dr. K. Borinski, Dozent an der Universität München. Nr. 40.

Posamentiererei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Ind. zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Psychologie und Logik zur Einführ. in die Philosophie, von Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Fig. Nr. 14.

Psychophysik, Grundriß der, von Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Rechnen, Kaufmännisches, von Richard Just, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. I. II. III. Nr. 139. 140. 187.

Rechtslehre, Allgemeine, von Dr. Th. Sternberg in Charlottenburg. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Redelehre, Deutsche, v. Hans Probst, Gymnasiallehrer in München. Mit einer Tafel. Nr. 61.

Religionsgeschichte, Indische, von Professor Dr. Edmund Hardy in Bonn. Nr. 83.

— — siehe auch Buddha.

Religionswissenschaft, Abriß der vergleichenden, von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 67.

— — siehe auch: Grammatik.

Sachs, Hans, u. Johann Fischart, nebst einem Anhang: Brant und Hutten. Ausgewählt und erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

Schmarotzer u. Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde v. Dr. Franz v. Wagner, a. o. Prof. a. d. Univers. Gießen. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Schuldir. in Ölsnitz i. V. Nr. 50.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel v. Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeb. von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Spitzenfabrikation. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Sprachdenkmäler, Gotische, mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen v. Dr. Herm. Jantzen in Breslau. Nr. 79.

Sprachwissenschaft, Indogermanische, von Dr. R. Meringer, Prof. an der Universität Graz. Mit einer Tafel. Nr. 59.

— **Romanische,** von Dr. Adolf Zauner, k. k. Realschulprof. in Wien. Nr. 128.

Stammeskunde, Deutsche, von Dr. Rudolf Much, Privatdozent an d. Universität Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Statik, I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper von W. Hauber, diplom. Ingenieur. Mit 82 Fig. Nr. 178.

— — II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Stenographie. Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einigungssystem Stolze - Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken und einem Anhang von Dr. Amsel, Oberlehrer des Kadettenhauses in Oranienstein. Nr. 86.

Digitized by Google

Sammlung Göschen

Je in elegantem Leinwandband **80 Pf.**

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Privatdozent an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbild. Nr. 201.

Stereometrie von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Mit 44 Figuren. Nr. 97.

Stilkunde von Karl Otto Hartmann, Gewerbeschulvorstand in Lahr. Mit 7 Vollbildern und 195 Text-Illustrationen. Nr. 80.

Technologie, Allgemeine chemische, von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Teerfarbstoffe, Die, mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Privatdozent an der Kgl. Techn. Hochschule D.esden. Nr. 214.

Telegraphie, Die elektrische, von Dr. Ludwig Rellstab. Mit 19 Fig. Nr. 172.

Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Dir. der Königlichen Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

— III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Tierbiologie I: Entstehung und Weiterbildung der Tierwelt, Beziehungen zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Mit 33 Abbildungen. Nr. 131.

— II: Beziehungen der Tiere zur organischen Natur von Dr. Heinrich Simroth, Prof. an der Universität Leipzig. Mit 35 Abbild. Nr. 132.

Tiergeographie, von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Tierkunde v. Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Gießen. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Trigonometrie, Ebene und sphärische, von Dr. Gerh. Hessenberg, Privatdoz. an der Techn. Hochschule in Berlin. Mit 70 Figuren. Nr. 99.

Unterrichtswesen, Das öffentliche, Deutschlands i. d. Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

Urgeschichte der Menschheit v. Dr. Moritz Hoernes, Prof. an der Univ. Wien. Mit 48 Abbild. Nr. 42.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Univ. Freiburg i. B. Nr. 180.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Univers. Wien. Mit 56 Abbild. Nr. 73.

Volkslied, Das deutsche, ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Jul. Sahr. Nr. 25.

Volkswirtschaftslehre v. Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Freiburg i. B. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Geh. Regierungsrat Dr. R. van der Borght, vortr. Rat im Reichsamt des Innern in Berlin. Nr. 177.

Waltharilied, Das, im Versmaße der Urschrift übersetzt und erläutert von Prof. Dr. H. Althof, Oberlehrer a. Realgymnasium i. Weimar. Nr. 46.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus Minnesang u. Spruchdichtung. Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von Otto Güntter, Prof. a. d. Oberrealschule und a. d. Techn. Hochsch. in Stuttgart. Nr. 23.

Warenkunde, von Dr. Karl Hassack, Professor an der Wiener Handelsakademie. 1. Teil: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.

Wärme. Theoretische Physik II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Professor an der Universität Wien. Mit 47 Abbild. Nr. 77.

Wäscherei. Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textilindustrie in Krefeld. Mit 28 Fig. Nr. 186.

Digitized by Google

Sammlung Göschen Je in elegantem Leinwandband 80 Pf.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Leipzig.

Weberei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Techn. Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Wechselkunde von Dr. Georg Funk in Mannheim. Mit vielen Formularen. Nr. 103.

Wirkerei. Textil-Industrie II: Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Professor Max Gürtler, Direktor der Königl. Technischen Zentralstelle für Textil-Industrie zu Berlin. Mit 27 Fig. Nr. 185.

Wolfram von Eschenbach. Hartmann v. Aue, Wolfram v. Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höf. Epos mit Anmerkungen u. Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof a. Kgl. Friedrichskolleg. z. Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Wörterbuch, nach der neuen deutsch. Rechtschreibung von Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

— **Deutsches**, v. Dr. Ferd. Detter, Prof. an d. Universität Prag. Nr. 64.

Zeichenschule von Prof. K. Kimmich in Ulm. Mit 17 Tafeln in Ton-, Farben- und Golddruck u. 135 Voll- und Textbildern. Nr. 39.

Zeichnen, Geometrisches, von H. Becker, Architekt und Lehrer an d. Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearb. v. Prof. J. Vonderlinn, diplom. und staatl. gepr. Ingenieur in Breslau. Mit 290 Fig. und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Göschens Kaufmännische Bibliothek

Sammlung praktischer kaufmännischer Handbücher, die nach ihrer ganzen Anlage berufen sein sollen, sowohl im kaufmännischen Unterricht als in der Praxis wertvolle Dienste zu leisten.

Bd. 1: **Deutsche Handelskorrespondenz** von Robert Stern, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Dozent an der Handelshochschule zu Leipzig. Geb. M. 1.80.

Bd. 2: **Deutsch-Französische Handelskorrespondenz** von Prof. Th. de Beaux, Oberlehrer an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Geb. M. 3.—.

Bd. 3: **Deutsch-Englische Handelskorrespondenz** von John Montgomery, Director, and Hon Secy, City of Liverpool School of Commerce, University College in Liverpool. Geb. M. 3.—.

Bd. 4: **Deutsch-Italienische Handelskorrespondenz** von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königl. Institut S. S. Annunziata in Florenz. Geb. M. 3.—.

Bd. 5: **Deutsch-Portugiesische Handelskorrespondenz** von Carlos Heilbling, Professor am Nationalkolleg und am polytechn. Liceum in Lissabon. Geb. M. 3.—.



Sammlung Schubert.

Sammlung mathematischer Lehrbücher,

die, auf wissenschaftlicher Grundlage beruhend, den Bedürfnissen des Praktikers Rechnung tragen und zugleich durch eine leicht faßliche Darstellung des Stoffs auch für den Nichtfachmann verständlich sind.

G. J. Göschen'sche Verlagshandlung in Leipzig.

Verzeichnis der bis jetzt erschienenen Bände:

1 **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 2.80.

2 **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. M. 4.80.

3 **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.—.

4 **Elementare Stereometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. M. 2.40.

5 **Niedere Analysis I. Teil: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Kettenbrüche und diophantische Gleichungen** von Professor Dr. Hermann Schubert in Hamburg. M. 3.60.

6 **Algebra mit Einschluß der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. M. 4.40.

7 **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. M. 5.—.

8 **Analytische Geometrie der Ebene** von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 6.—.

9 **Analytische Geometrie des Raumes I. Teil: Gerade, Ebene, Kugel** von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.—.

10 **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Frz. Meyer in Königsberg. M. 9.—.

12 **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. M. 5.—.

13 **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. 2. Auflage. M. 8.—.

14 **Praxis der Gleichungen** von Professor C. Runge in Hannover. M. 5.20.

19 **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungs-Rechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. M. 8.—.

20 **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Grossmann in Wien. M. 5.—.

25 **Analytische Geometrie des Raumes II. Teil: Die Flächen zweiten Grades** von Professor Dr. Max Simon in Straßburg. M. 4.40.

27 **Geometrische Transformationen I. Teil: Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen** von Professor Dr. Karl Doehlemann in München. M. 10.—.

29 **Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen I. Teil** von Professor Dr. Victor Kommerell in Reutlingen und Professor Dr. Karl Kommerell in Heilbronn. M. 4.80.

31 **Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale** von Oberlehrer E. Landfriedt in Straßburg. M. 8.50.

Digitized by Google

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW

AN INITIAL FINE OF 25 CENTS
WILL BE ASSESSED FOR FAILURE TO RETURN THIS BOOK ON THE DATE DUE. THE PENALTY WILL INCREASE TO 50 CENTS ON THE FOURTH DAY AND TO $1.00 ON THE SEVENTH DAY OVERDUE.

SEP 20 1937
SEP 21 1937
OCT 21 1937

Theorie der
Kurven.
Elliptische Funktionen.

Digitized by Google

TA 02455

Elemente der Stereometrie

von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller.

Band I: **Die Lehrsätze und Konstruktionen.** Mit 282 Figuren. Preis brosch. Mk. 6.—, geb. Mk. 6.60.

„ II: **Die Berechnung einfach gestalteter Körper.** Mit 156 Figuren. Preis brosch. Mk. 10.—, geb. Mk. 10.80.

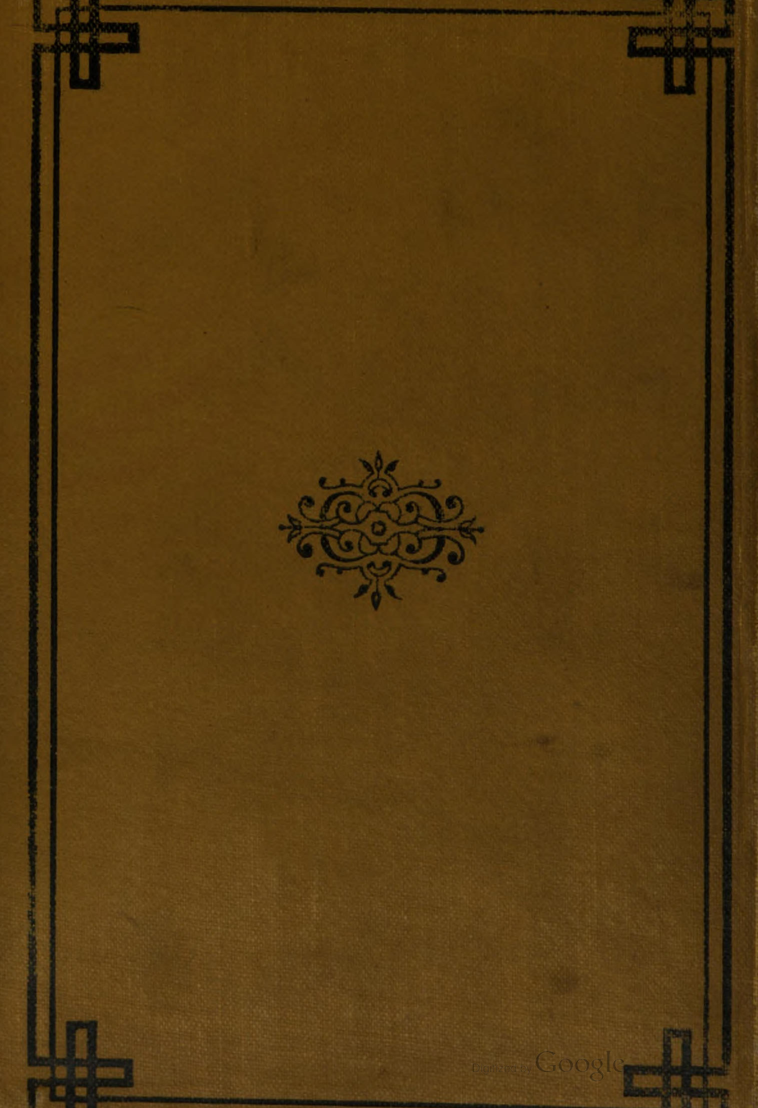
„ III: **Die Untersuchung u. Konstruktion schwierigerer Raumgebilde.** Mit 126 Figuren. Preis brosch. Mk. 9.—, geb. Mk. 9.80.

921889 QC20 J3 1904 v.1

THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY

G. J. Göschen[illegible] in Leipzig.

Digitized by Google


Digitized by Google